

**Modelado Matemático y simulación de un Sistema de Fraccionamiento para subproductos líquidos de la Pirólisis de Polipropileno****Mathematical Modeling and simulation of a Fractionation System for liquid by-products from Polypropylene Pyrolysis***Johana Estefania Orna Quintanilla & Sayuri Monserrath Bonilla Novillo***DIMENSIÓN CIENTÍFICA****Enero - junio, V°7 - N°1; 2026****Recibido:** 20-01-2026**Aceptado:** 21-01-2026**Publicado:** 23-01-2026**PAIS**

- Ecuador, Riobamba
- Ecuador, Riobamba

**INSTITUCION**

- Universidad Nacional de Chimborazo
- Universidad Nacional de Chimborazo

**CORREO:**

- ✉ [johana.orna@unach.edu.ec](mailto:johana.orna@unach.edu.ec)
- ✉ [smbonilla@espoch.edu.ec](mailto:smbonilla@espoch.edu.ec)

**ORCID:**

- 🌐 <https://orcid.org/0000-0003-1910-8049>
- 🌐 <https://orcid.org/0000-0001-6509-8238>

**FORMATO DE CITA APA.**

Orna, J. & Bonilla, S. (2026). Modelado Matemático y simulación de un Sistema de Fraccionamiento para subproductos líquidos de la Pirólisis de Polipropileno. *Revista G-ner@ndo*, V°7 (N°1). Pág. 495 – 513.

**Resumen**

Los subproductos líquidos de la pirólisis de polipropileno presentan una composición multicomponente compleja que dificulta su tratamiento analítico directo y el diseño preliminar de operaciones de separación. En este contexto, el modelado matemático permite describir de manera estructurada las relaciones funcionales entre variables de diseño en sistemas de fraccionamiento asociados a este tipo de mezclas. Desarrollar un modelo matemático algebraico explícito que relaciona el número de etapas teóricas con el reflujo en un sistema de fraccionamiento aplicado a líquidos de la pirólisis de polipropileno. El sistema se representa mediante un conjunto finito de pseudocomponentes y el planteamiento del modelo se apoya en las ecuaciones estructurales de Fenske y Underwood para la determinación de los límites mínimos teóricos. A partir de estas bases, se introducen variables adimensionales normalizadas que permiten definir un cierre algebraico de tipo potencia, mediante el cual se obtiene una expresión explícita del reflujo en función del número de etapas. Los resultados muestran que el modelo cumple condiciones de existencia, unicidad y regularidad de la solución, garantizando un comportamiento positivo, continuo y monótonamente decreciente del reflujo respecto al número de etapas. La validación numérica, realizada mediante comparación con el sistema FUG, arrojó errores relativos acotados, con un valor promedio cercano al 0.4 % y un error máximo inferior al 1 % dentro del rango analizado. En conjunto, la formulación desarrollada constituye una herramienta algebraica explícita y analíticamente manejable para el análisis estructural y el diseño preliminar de sistemas de fraccionamiento asociados a procesos de la pirólisis de polipropileno.

**Palabras clave:** Modelado matemático; Sistema algebraico no lineal; Fraccionamiento; Sistema Fenske–Underwood–Gilliland.

**Abstract**

The liquid by-products generated from polypropylene pyrolysis exhibit a complex multicomponent composition that complicates both direct analytical treatment and the preliminary design of separation processes. In this context, mathematical modeling offers a systematic framework for describing the functional relationships among key design variables in fractionation systems. To develop an explicit algebraic mathematical model that relates the number of theoretical stages to the reflux ratio in a fractionation system applied to polypropylene pyrolysis liquids. The system is represented by a finite set of pseudocomponents, and the model formulation is grounded in the Fenske and Underwood equations to establish theoretical minimum limits. Based on this framework, normalized dimensionless variables are introduced to construct a power-law algebraic closure, yielding an explicit expression for the reflux ratio and number of stages. The proposed model satisfies existence, uniqueness, and regularity conditions, ensuring positive, continuous, and monotonically decreasing behavior of the reflux ratio with increasing stage number. Numerical validation against the FUG system shows bounded relative errors, with an average of approximately 0.4% and a maximum below 1% over the analyzed operating range. The formulation provides a practical and analytically tractable tool for preliminary design and structural analysis of fractionation systems in polypropylene pyrolysis processes.

**Keywords:** Mathematical modeling; nonlinear algebraic system; fractionation; Fenske–Underwood–Gilliland system.

## Introducción

Los plásticos a nivel mundial han experimentado un crecimiento acelerado en las últimas décadas, alcanzando 368 millones de toneladas en 2019 (López-Fernández et al., 2021; PlasticsEurope, 2021). Este aumento ha contribuido a una acumulación masiva de residuos, de los cuales cerca del 50 % termina en vertederos y aproximadamente 15 millones de toneladas ingresan anualmente a los océanos, donde se fragmentan en microplásticos que afectan gravemente los ecosistemas marinos (Jeremiah, Kabeyi & Olanrewaju, 2023; Julien et al., 2019; Dalila Aldana Aranda, 2023). Entre estos materiales, el polipropileno (PP) es uno de los más utilizados, porque presenta una baja densidad que favorece su persistencia en ambientes acuáticos (Enríquez Pinos & Álvarez Castillo, 2023; Nakatani et al., 2022).

Frente a esta problemática, diversas estrategias de reciclaje han sido desarrolladas, incluyendo procesos mecánicos, químicos y energéticos (Ulpo, Espín & Palmay, 2023; Schyns & Shaver, 2021). Dentro del reciclaje químico, el pirólisis se ha consolidado como una tecnología versátil y eficiente para convertir residuos plásticos en aceites líquidos, gases combustibles y carbón (Ma et al., 2024; Gloria María Aponte Figueroa, 2023). Este proceso permite valorizar plásticos que no se reciclan por métodos usuales, contribuyendo a la economía circular (Armenise et al., 2021; Guachamín-Valencia et al., 2023; Shaker & Rabnawaz, 2024).

Sin embargo, el aceite líquido obtenido por pirólisis presenta una composición compleja que dificulta su separación y aprovechamiento (Jeswani et al., 2021; Strien et al., 2024). Para incrementar su utilidad energética o industrial, la destilación fraccionada constituye una operación esencial, al permitir la separación de componentes de distinta volatilidad (Zhang et al., 2019). En este contexto, el modelado matemático se presenta

---

como una herramienta fundamental para estudiar el comportamiento estructural del fraccionamiento, proporcionando descripciones basadas en ecuaciones funcionales que permiten analizar el sistema sin recurrir inicialmente a simulaciones termodinámicas complejas (Yang, 2017; Rivera Rojas et al., 2023).

Diversos estudios han mostrado que los modelos matemáticos no lineales permiten capturar la dinámica global de los procesos de separación, ofreciendo estimaciones preliminares útiles antes de aplicar formulaciones fisicoquímicas detalladas (Amar Gil et al., 2019; Maqsood et al., 2021; Potnuri et al., 2022). En este marco, el sistema Fenske, Underwood y Gilliland (FUG) ha sido utilizado de manera recurrente para representar la relación entre volatilidades relativas, reflujo y número de etapas, constituyéndose en una formulación matemáticamente tratable e informativa.

El modelado matemático constituye una herramienta primordial en el análisis de sistemas complejos, ya que permite describir su comportamiento mediante relaciones funcionales entre variables y parámetros. De acuerdo con (Yang, 2017), un mismo sistema físico puede ser representado mediante diferentes modelos matemáticos, que permitan analizar la estructura del sistema sin recurrir a formulaciones termodinámicas avanzadas.

Desarrollar un modelo matemático explícito orientado al diseño preliminar de un sistema de fraccionamiento aplicado a subproductos líquidos de la pirólisis de polipropileno, con el propósito de establecer una conexión funcional directa entre el número de etapas teóricas ( $N$ ) y el reflujo ( $R$ ).

### **Materiales y Métodos**

El presente trabajo se desarrolla con un enfoque cuantitativo y descriptivo, orientado al modelado matemático de un sistema de fraccionamiento aplicado a subproductos

---

líquidos de la pirólisis de polipropileno, con el objetivo de formular una relación funcional entre las variables estructurales y operativas del proceso.

El propósito del modelo no es reproducir de forma detallada el comportamiento termodinámico del proceso, sino construir una representación matemática simplificada, coherente y validable, que permita analizar la relación entre N y R en condiciones de diseño preliminar.

#### Representación pseudocomponente del líquido de pirólisis

Los líquidos obtenidos de la pirólisis de polipropileno presentan una composición compleja, formada por una distribución continua de hidrocarburos. Para permitir una formulación matemática tratable, el sistema se representa mediante un conjunto finito de pseudocomponentes, caracterizados por parámetros efectivos.

Cada pseudocomponente  $i$  (representaciones efectivas de conjuntos de compuestos químicos que presentan propiedades de volatilidad similares), se caracteriza mediante los parámetros del modelo;  $z_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $x_{D,i}$ , y  $x_{B,i}$ , que representan, respectivamente, la fracción molar en la alimentación, la volatilidad relativa y la distribución del componente en las corrientes de destilado y fondo. Estos parámetros constituyen datos de entrada y especificaciones de diseño del modelo.

#### Variables del modelo

En el marco del método Fenske–Underwood–Gilliland (FUG), los valores característicos del sistema se expresan mediante el conjunto:

$$x = [R, R_{min}, N_{min}, \theta] \quad (1)$$

---

donde:

$R$  es el reflujo real,

$R_{min}$  es el reflujo mínimo,

$N_{min}$  es el número mínimo de etapas teórica

$\theta$  es el parámetro de Underwood

El número de etapas  $N_{obj}$  se fija como variable de diseño, mientras que  $N_{min}$  y  $R_{min}$  se determinan a partir de las ecuaciones estructurales del método FUG, siendo únicamente  $\theta$  obtenida como solución de la ecuación no lineal de Underwood.

### Ecuaciones estructurales

#### Ecuación de Fenske

El número mínimo de etapas teóricas se obtiene mediante:

$$N_{min} = \frac{\ln \left( \frac{x_{D,LK}}{x_{D,HK}} \cdot \frac{x_{B,HK}}{x_{B,LK}} \right)}{\ln \left( \frac{\alpha_{LK}}{\alpha_{HK}} \right)} \quad (2)$$

donde  $x_{D,LK}$  y  $x_{B,LK}$  representan las fracciones molares del componente ligero clave (LK) en el destilado y en el fondo.

#### Ecuación de Underwood

Se utiliza para calcular el reflujo mínimo que es esencial para diseñar la columna, ya que permite estimar el número real de etapas y establecer condiciones de operación económicamente óptimas. En esta ecuación, el parámetro  $\theta$  se define como la solución racional no lineal de la ecuación.

$$\sum_{i=1}^n \frac{qz_i}{\alpha_i - \theta} = 1 \quad (3)$$

---

con el requisito de que  $\theta \in (\alpha_{HK}, \alpha_{LK})$ . La función definida por el lado izquierdo es continua y decreciente en el rango admisible, lo que confirma la existencia y unicidad de la solución.

Cuando  $q = 1$ , la alimentación corresponde a un líquido saturado, es decir, está completamente en fase líquida pero justo en equilibrio con su vapor, sin subenfriamiento ni sobrecalentamiento.

#### Reflujo mínimo

Con el valor de  $\theta$  determinado, el reflujo mínimo se calcula mediante

$$R_{min} = \sum_{i=1}^n \frac{x_{D,i} \cdot \alpha_i}{\alpha_i - \theta} - 1 \quad (4)$$

Representa el límite energético inferior para alcanzar la separación deseada.

En la literatura, el cierre del sistema FUG se realiza habitualmente mediante correlaciones empíricas, siendo la correlación de Gilliland una de las más utilizadas.

$$X = \frac{R - R_{min}}{R + 1} \quad (5)$$

$$Y = 1 - \exp\left(\frac{1 + 54.4X}{11 + 117.2X} * \frac{X - 1}{\sqrt{X}}\right) \quad (6)$$

La variable  $Y$  se define en términos del número de etapas mediante:

$$N = \frac{Y + N_{min}}{1 - Y} ; \quad Y = \frac{N - N_{min}}{N + 1} \quad (7)$$

Esta relación no proporciona una expresión explícita de  $R$  como función de  $N$ , por lo que su aplicación requiere procedimientos iterativos o el uso de correlaciones gráficas.

#### Modelo matemático Propuesto

---

Las ecuaciones estructurales de Fenske y Underwood permiten obtener los límites mínimos teóricos, como el  $N_{min}$  y el  $R_{min}$ . Sin embargo, estas ecuaciones no proporcionan una relación funcional directa entre el reflujo y el número de etapas reales.

Para superar esta limitación se utilizaron variables normalizadas. Esto hace que el modelo sea más simple y manejable. Esta elección responde a un criterio de modelado matemático, en los cuales la elección del cierre del sistema depende del objetivo del análisis y del nivel de abstracción requerido.

Se introducen los excesos normalizados de estructura y energía definidos como:

$$\Delta N = \frac{N_{obj} - N_{min}}{N_{min}} \quad (8)$$

$$\Delta R = \frac{R - R_{min}}{R_{min}} = \phi - 1 \quad (9)$$

Durante la etapa de calibración del reflujo se utilizó parámetros adimensionales con  $\phi = R / R_{min}$  el cual genera datos de referencia a partir del sistema FUG mediante la relación  $\Delta R = \phi - 1$ , que se encuentra en rangos de 1.2 y 1.5. Este parámetro se utiliza exclusivamente con fines de ajuste y no forma parte de los cálculos del modelo propuesto.

Bajo la hipótesis de que el exceso energético requerido disminuye de manera monótona al aumentar el exceso estructural, se adopta el siguiente cierre algebraico:

$$\Delta R = k (\Delta N)^m, \quad k > 0, m < 0 \quad (10)$$

Los parámetros  $k$  y  $m$  se interpreta como parámetros de calibración dependientes del sistema y del rango lo que no los hace universal, dichos parámetros se los determina a partir de datos generados mediante el sistema FUG, Este cierre permite obtener una aproximación explícita de la relación implícita a través del número de etapas teóricas y el reflujo.

---

De esta forma, queda expresado como:

$$R = R_{min} \left[ 1 + k \left( \frac{N_{obj} - N_{min}}{N_{min}} \right)^m \right] \quad (11)$$

lo que define el modelo matemático propuesto y establece una relación funcional directa entre las variables de diseño del sistema.

Implementación computacional en Python.

El desarrollo computacional del modelo se llevó a cabo utilizando el lenguaje Python, el cual permitió abordar los cálculos que no admiten una resolución analítica directa, donde el parámetro de Underwood  $\theta$  se obtuvo resolviendo la ecuación no lineal asociada mediante el método de bisección, asegurando que la solución se localizara dentro del intervalo físicamente admisible. A partir de este valor fue posible determinar el reflujo mínimo  $R_{min}$ .

Además, se empleó para evaluar numéricamente la correlación de Gilliland, con el fin de establecer la relación implícita entre el número de etapas teóricas y reflujo. Dado que dicha correlación no puede obtenerse de manera explícita, requiriendo el uso de procedimientos iterativos, cuyo código en Python se presenta en el Anexo 1.

Estrategia de validación

La validación del modelo se realizó mediante una semejanza entre los valores de reflujo y modelo propuesto del sistema FUG. La evaluación comparativa se llevó a cabo utilizando dos métricas el residuo absoluto y el error relativo porcentual del reflujo se calculó como:

$$Residuo = R_{modelo} - R_{ref} \quad (12)$$

---



$$Error \% = \left| \frac{R_{modelo} - R_{ref}}{R_{ref}} \right| * 100 \quad (13)$$

donde  $R_{modelo}$  corresponde al valor de reflujo estimado mediante el modelo propuesto y  $R_{ref}$  obtenido con el método de referencia (FUG). Los criterios de aceptación, se establecieron residuos próximos a cero y errores relativos porcentuales dentro de los rangos habitualmente considerados en modelos de diseño preliminar, generalmente inferiores al 10 %.

### Análisis de Resultados

El modelo matemático no lineal propuesto fue evaluado empleando un sistema de tres pseudocomponentes, cuyos valores constituyen los parámetros de entrada del modelo.

Los datos de entrada utilizados se muestra en la Tabla 1. El pseudocomponente más volátil se consideró como Light Key (LK) y el menos volátil como Heavy Key (HK). Se asumió una alimentación líquida saturada ( $q=1$ ).

**Tabla 1.** Datos de entrada del modelo (pseudocomponentes)

Pseudocomponente	$(z_i)$ (alimentación)	$(\alpha_i)$	$x_{Di}$	$x_{B,i}$ (fondo)
		(volatilidad relativa)	(destilado)	
PC1 (ligero)	0.40	4.0	0.85	0.05
PC2 (medio)	0.40	2.0	0.14	0.50
PC3 (pesado)	0.20	1.0	0.01	0.45

Fuente: Elaboración propia

#### Cálculo de los parámetros estructurales mínimos

A partir de los datos de entrada, se determinaron los límites mínimos teóricos del sistema mediante las ecuaciones estructurales de Fenske (ecuación 2) y Underwood (ecuaciones 3 y 4). Los valores calculados se muestran en la Tabla 2.

**Tabla 2.** *Parámetros estructurales mínimos*

Variables	Valor aproximado
$N_{min}$	4.79
$R_{min}$	1.23
$\theta$	1.64

Fuente: Elaboración propia

El parámetro de Underwood se localiza dentro del intervalo  $(\alpha HK, \alpha LK)$ , garantizando la regularidad de las funciones racionales. Asimismo, se verifica  $N_{min} > 0$  y  $R_{min} > 0$ , condiciones necesarias para la consistencia matemática del modelo.

#### Evaluación del modelo matemático explícito

El modelo matemático propuesto establece una conexión directa entre el número de etapas teóricas y el reflujo, corresponde a la ecuación (10). Para el sistema analizado, los valores de  $k$  y  $m$  se estimaron utilizando información como el número mínimo de platos y reflujo producida por el sistema FUG.

Una vez determinados los valores mínimos del número de etapas y del reflujo mediante las ecuaciones de Fenske y Underwood, se utilizó la correlación de Gilliland para estimar el reflujo correspondiente a distintos números de etapas, los pares  $R(N)$  obtenidos se emplearon para calcular los excesos normalizados  $\Delta N$  y  $\Delta R$ , definidos en las ecuaciones (8) y (9).

Bajo la hipótesis del modelo expresado en la ecuación (10), se aplicó una linealización logarítmica de la relación potencia:

$$\ln \Delta R = \ln(k) + m \ln(\Delta N) \quad (14)$$

Los datos utilizados para el ajuste se muestran en la Tabla 3.

**Tabla 3.** Datos utilizados en la determinación de los parámetros  $k$  y  $m$ 

$\phi$	$\Delta R$	$\Delta N$	$\ln \Delta R$	$\ln \Delta N$
1.20	0.20	1.50	-1.61	0.41
1.23	0.23	1.43	-1.47	0.35
1.26	0.26	1.36	-1.35	0.30
1.29	0.29	1.29	-1.24	0.26
1.30	0.30	1.27	-1.20	0.24
1.32	0.32	1.23	-1.14	0.21
1.35	0.35	1.18	-1.05	0.17
1.38	0.38	1.13	-0.97	0.13
1.40	0.40	1.10	-0.92	0.10
1.45	0.45	1.04	-0.80	0.04
1.50	0.50	0.98	-0.69	-0.02

Fuente: Elaboración propia

A partir de la regresión lineal en escala logarítmica aplicada a los datos de la Tabla 3, se obtuvieron los siguientes valores de calibración para el modelo propuesto:

$$k = 0.49 \quad m = -2.11$$

El signo negativo del exponente  $m$  garantiza que la función  $R(N)$  sea estrictamente decreciente, reflejando un aumento en el número de etapas disponibles, que permite reducir el reflujo requerido, con el comportamiento físico esperado en procesos de destilación fraccionada.

#### Validación del modelo matemático

La evaluación del modelo matemático propuesto se realizó mediante una comparación numérica entre el reflujo calculado del modelo propuesto ( $R_{modelo}$ ) y el reflujo obtenido a partir de FUG ( $R_{ref}$ ). Para ello, se seleccionaron diez valores discretos del número de etapas teóricas, denotados como  $N_{ref} = N_{obj}$ , se seleccionó dentro de un intervalo físicamente razonable, definido a partir del número mínimo de etapas  $N_{min}$ ,

obtenido de la ecuación de Fenske, representa un límite teórico inferior no operable y considerando criterios clásicos de diseño preliminar de columnas de destilación, se adoptó un intervalo de validación comprendido entre  $N_{\min} + 2$  y aproximadamente  $3 N_{\min}$ . Este intervalo permite evitar regiones cercanas a los límites teóricos, donde el comportamiento del sistema puede presentar singularidades, y resulta representativo de condiciones habituales de diseño preliminar (Warren L. McCabe. Smith Peter, 2017).

La comparación entre ambos conjuntos de resultados se llevó a cabo empleando el residuo absoluto y el error relativo porcentual, definidos en las ecuaciones (12) y (13).

Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 4.

**Tabla 4.** *Validación del modelo*

$N_{ref} = N_{obj}$	$R_{ref}$	$R_{modelo}$	Residuo	Error (%)
9.50	1.8337	1.8505	0.0168	0.91
9.75	1.7803	1.7861	0.0059	0.33
10.00	1.7322	1.7311	-0.0011	0.06
10.10	1.7143	1.7113	-0.0030	0.17
10.45	1.6568	1.6504	-0.0065	0.39
11.00	1.5802	1.5752	-0.0050	0.32
11.39	1.5340	1.5333	-0.0007	0.05
11.80	1.4912	1.4968	0.0056	0.37
12.00	1.4722	1.4813	0.0091	0.62
12.20	1.4542	1.4670	0.0128	0.88

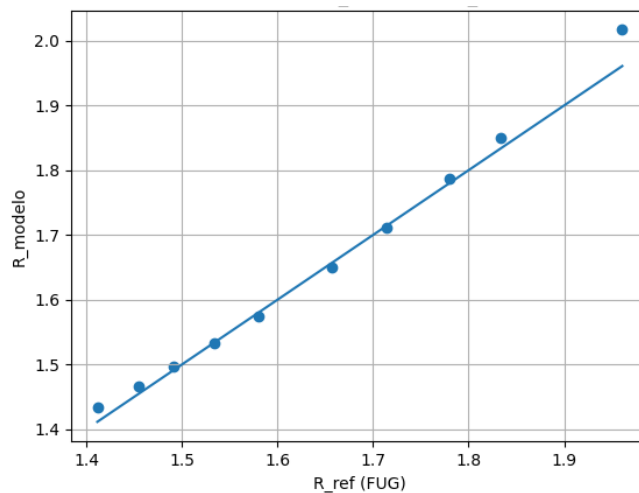
*Fuente:* Elaboración propia

Los resultados en la Tabla 4 presentan una concordancia entre los valores de reflujo obtenidos mediante el modelo matemático propuesto y aquellos calculados con el método FUG, utilizado como referencia. La diferencia entre ambos valores es menor al 1 %, lo que demuestra que el modelo propuesto reproduce correctamente el comportamiento del sistema FUG.

La dispersión observada entre ambos resultados se atribuye al carácter no lineal del método FUG y al proceso de aproximación algebraica empleado, sin que ello implique una pérdida de consistencia matemática. Lo que la validación confirma que el modelo explícito permite estimar el reflujo como función del número de etapas teóricas, evitando la necesidad de procedimientos iterativos

La Figura 1 presenta la gráfica de concordancia entre  $R_{ref}$  y  $R_{modelo}$ , donde los puntos se distribuyen próximos a la recta. Esta tendencia refleja una alta correlación entre ambos enfoques y respalda el modelo propuesto para replicar el comportamiento no lineal del sistema FUG dentro del rango de diseño.

**Figura 1.** Diagrama de dispersión entre el  $R_{ref}$  y  $R_{modelo}$



Fuente: Elaboración propia

## Discusión

El modelo matemático propuesto permite una establecer una relación funcional directa entre el número de etapas teóricas y el reflujo en el sistema de fraccionamiento aplicado a los líquidos obtenidos de la pirólisis de polipropileno. La formulación se construye a partir de los límites estructurales definidos por las ecuaciones de Fenske y Underwood, incorporando una normalización que facilita el análisis algebraico del problema.

El modelo propuesto no es reproducir de forma detallada el equilibrio termodinámico del proceso de destilación, sino capturar la dependencia funcional entre variables de diseño relevantes en una etapa de análisis preliminar, de acuerdo con los principios generales expuestos por Yang (2017).

El comportamiento monótonamente decreciente de la función de reflujo con respecto al número de etapas, garantizado por la condición  $m < 0$ , lo que constituye una propiedad central del modelo y asegura la coherencia entre su estructura matemática y la interpretación física del proceso de destilación. La magnitud del exponente  $m$  determina la sensibilidad del reflujo frente a variaciones en el número de etapas disponibles, permitiendo analizar la complejidad estructural y consumo energético de la torre de fraccionamiento (Seader, 2003).

La valorización de residuos plásticos mediante la pirólisis, diversos autores han señalado la necesidad de herramientas de modelado que faciliten la integración de etapas de separación en esquemas de reciclaje químico (Potnuri et al., 2022; Jeremiah et al., 2023).

Finalmente, El modelo ayuda a obtener un análisis preliminar para la destilación fraccionaria. Al expresarse en términos de variables normalizadas y parámetros ajustables,

---

su estructura matemática puede adaptarse a diferentes sistemas de pseudocomponentes y condiciones de operación, siempre dentro del marco de las hipótesis establecidas.

### **Conclusiones**

Para describir la relación funcional entre las etapas teóricas y el reflujo en un sistema de fraccionamiento, a partir de una representación adimensional y de los límites estructurales mínimos establecidos por las ecuaciones clásicas de Fenske y Underwood, lo que se apoya en una normalización adecuada de las variables que expresa el comportamiento del sistema mediante una relación funcional cerrada y analíticamente manejable.

Bajo un enfoque matemático, el modelo propuesto define la función en el dominio admisible, para la cual se verifican condiciones de existencia, unicidad y regularidad de la solución. En particular, la localización del parámetro de Underwood en el intervalo  $\theta \in (\alpha HK, \alpha LK)$ , garantiza las expresiones racionales involucradas, así como la continuidad y la monotonía decreciente del reflujo con respecto al número de etapas teóricas, propiedades coherentes con la estructura de la torre de fraccionamiento.

El cierre constitutivo propuesto, basado en una relación tipo potencia entre los excesos normalizados de estructura y energía, permitió introducir los parámetros de calibración  $k$  y  $m$ , los cuales fueron determinados a partir de datos generados mediante el sistema FUG. En particular, el valor obtenido de  $m=-2.11$  refleja una alta sensibilidad del reflujo frente a variaciones en el número de etapas, mientras que el parámetro  $k=0.49$  corresponde al nivel de exceso energético relativo del sistema para una condición estructural de referencia.

---

La validación numérica se llevó a cabo mediante una comparación con los valores obtenidos a partir del sistema FUG, tomando como referencia tanto el residuo absoluto como el error relativo porcentual, con un error promedio de 0.4 % y error máximo < 1%. Este comportamiento evidencia que el modelo matemático propuesto reproduce de forma satisfactoria la solución implícita del modelo de referencia, conservando su tendencia funcional y evitando la necesidad de procedimientos iterativos.

El aporte del modelo propuesto sustituye una relación empírica implícita que corresponde a la correlación de Gilliland, que describe la relación entre el número de etapas y el reflujo mediante curvas ajustadas, cuya aplicación depende de interpolaciones y procedimientos iterativos, por un modelo explícito y analíticamente tratable que define una función algebraica cerrada dentro de un dominio operativo, permitiendo estudiar propiedades matemáticas relevantes del sistema, tales como continuidad, monotonía y sensibilidad, las cuales no son evidentes a partir de una correlación gráfica. En este sentido, el modelo no pretende reemplazar el modelo clásico, sino proporcionar una representación funcional equivalente a nivel estructural, que facilite el análisis matemático y el diseño preliminar de torres de fraccionamiento asociadas a líquidos de la pirólisis de polipropileno.

---



## Referencias bibliográficas

- Amar Gil, S., Arias Ardila, & Barrera Zapata, R. (2019). Simulación y obtención de combustibles sintéticos a partir del pirólisis de residuos plásticos. *Ingeniería y Desarrollo*, 37(2), 306–326. <https://doi.org/10.14482/inde.37.2.1285>
- Armenise, S., SyieLuing, W., Ramírez-Velásquez, J. M., Launay, F., Wuebben, D., Ngadi, N., Rams, J., & Muñoz, M. (2021). Plastic waste recycling via pyrolysis: A bibliometric survey and literature review. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 158, 105265. <https://doi.org/10.1016/j.jaap.2021.105265>
- Aranda Dalila. (2023). Contaminación por microplásticos. [https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/73\\_2/PDF/Ciencia\\_73-2.pdf](https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/73_2/PDF/Ciencia_73-2.pdf)
- Enríquez Pinos, C. G., & Alvarez Castillo, E. A. (2023). Implementación de Plástico Polipropileno como Material de Contacto en Aireadores de Bandejas. *Ingenio*, 6(2), 71–81. <https://doi.org/10.29166/ingenio.v6i2.4461>
- Figueroa Gloria. (2023). Producción de combustibles a partir de desechos plasticos mediante procesos de reciclado químico. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10199056>
- Guachamin-Valencia Cristian Santiago; Castro-García Cristhian Jesús; García-Muentes Segundo Alcides; García-Ávila Segundo Alcides; Cevallos-Cedeño Ramón Eudoro; García-Vinces Gonzalo Oswaldo. (2023). Obtención de combustibles a partir de pirólisis de material plástico reciclado de polietileno de alta densidad (pead) obtaining fuels from the pyrolysis of recycled high-density polyethylene plastic material (HDPE). *Ingeniería Global*, 6(11), 2023. <https://doi.org/10.46296/ig.v6i11.0090>
- Jeremiah, M., Kabeyi, B., & Olanrewaju, O. A. (2023). Review and Design Overview of Plastic Waste-to-Pyrolysis Oil Conversion with Implications on the Energy Transition. *Journal of Energy*, 2023, 1821129. <https://doi.org/10.1155/2023/1821129>
- Julienne, F., Delorme, N., & Lagarde, F. (2019). From macroplastics to microplastics: Role of water in the fragmentation of polyethylene. *Chemosphere*, 236, 124409. <https://doi.org/10.1016/J.chemosphere.2019.124409>
- López-Fernández, M. del M., Franco-Mariscal, A. J., López-Fernández, M. del M., & Franco-Mariscal, A. J. (2021). Indagación sobre la degradación de plásticos con estudiantes de secundaria. *Educación Química*, 32(2), 21–36. <https://doi.org/10.22201/fq.18708404e.2021.2.76553>
- Ma, C., Kumagai, S., Saito, Y., Yoshioka, T., Huang, X., Shao, Y., Ran, J., & Sun, L. (2024). Recent Advancements in Pyrolysis of Halogen-Containing Plastics for Resource Recovery and Halogen Upcycling: A State-of-the-Art Review. *Environmental Science and Technology*, 58(3), 1423–1440. <https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/acs.est.3c09451>
-

- Maqsood, T., Dai, J., Zhang, Y., Guang, M., & Li, B. (2021). Pyrolysis of plastic species: A review of resources and products. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 159, 105295. <https://doi.org/10.1016/J.JAAP.2021.105295>
- McCabe, W. L., Smith, J. C., & Harriott, P. (2017). Operaciones Unitarias en la Ingeniería Química. Operaciones Unitarias en la Ingeniería-química.pdf. <https://iestpcabana.edu.pe/wp-content/uploads/2021/11/>
- Nakatani, H., Ohshima, Y., Uchiyama, T., & Suguru, M. (2022). Degradation and fragmentation behavior of polypropylene and polystyrene in water. *Scientific Reports*, 12(1). <https://doi.org/10.1038/s41598-022-23435-y>
- PlasticsEurope. (2021). Plastics – the facts 2021: An analysis of European plastics production, demand and waste data. <https://plasticseurope.org/knowledge-hub/plastics-the-facts-2021/>
- Potnuri, R., Suriapparao, D. V., Rao, C. S., & Kumar, T. H. (2022). Understanding the role of modeling and simulation in pyrolysis of biomass and waste plastics: A review. *Bioresource Technology Reports*, 20, 101221. <https://doi.org/10.1016/j.biteb.2022.101221>
- Rivera Rojas, J. L., Guerra González, R., & Lemus Solorio, M. A. (2023). Importancia de los modelos matemáticos y sus diversas aplicaciones en la ingeniería y ciencias ambientales. *Milenaria, Ciencia y Arte*, ISSN-e 2954-4289, No. 21, 2023, Págs. 40-42, 21, 40–42. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9147141>
- Seader, J. D., Henley, E. J., & Roper, D. K. (2003). Operaciones de separación por etapas de Ingeniería Química. [https://termoapunefm.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/10/operacionesdeseparacionporetapasenequilibrioeningeniaquimica-seader\\_henley.pdf](https://termoapunefm.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/10/operacionesdeseparacionporetapasenequilibrioeningeniaquimica-seader_henley.pdf)
- Schyns, Z. O. G., & Shaver, M. P. (2021). Mechanical Recycling of Packaging Plastics: A Review. In *Macromolecular Rapid Communications* (Vol. 42, Issue 3). Wiley-VCH Verlag. <https://doi.org/10.1002/marc.202000415>
- Shaker, M., & Rabnawaz, M. (2024). Tailoring Olefin Contents Formation during Waste Plastic Pyrolysis. *ACS Applied Polymer Materials*, 6(16), 9866–9874. <https://doi.org/10.1021/acsapm.4c01717>
- Strien, J. R. J., Genuino, H. C., van Eijk, M. C. P., Deuss, P. J., & Heeres, H. J. (2024). Pyrolysis of Polyolefin-Enriched Mixed Plastic Waste Streams: Effects of Pretreatments and Presence of Hydrogen during Pyrolysis. *Energy and Fuels*. [https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.4c04745/asset/images/large/ef4c04745\\_0007.jpeg](https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.4c04745/asset/images/large/ef4c04745_0007.jpeg)
- Ulpo, K., Espín, D., & Palmay, P. (2023). Co-pirólisis de la mezcla de biomasa lignocelulósica y residuos plásticos. *Perfiles*, 1(29), 69–77. <https://doi.org/10.47187/perf.v1i29.207>
- Yang, X.-S. (2017). Mathematical Modeling. *Engineering Mathematics with Examples and Applications*, 325–340. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-809730-4.00037->
-

Zhang, X., Ma, H., Wu, S., Jiang, W., Wei, W., & Lei, M. (2019). Fractionation of pyrolysis oil derived from lignin through a simple water extraction method. *Fuel*, 242, 587–595. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2019.01.083>.