Revista Científica Multidisciplinar G-ner@ndo ISSN: 2806-5905

Diseño y modelado de un sistema de Manipulación Robótica controlado a distancia para el manejo seguro de sustancias químicas en entornos industriales

Design and modeling of a remote controlled robotic handling system for the safe handling of chemicals in industrial environments

Estalin Romero & Sayuri Bonilla

PUNTO CIENCIA.

Julio - diciembre, V°6 - N°2; 2025

Recibido: 17-10-2025
Aceptado: 18-11-2025
Publicado: 20-11-2025

PAIS

- Ecuador, Ambato
- Ecuador, Riobamba

INSTITUCION

- Universidad Nacional de Chimborazo
- Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

CORREO:

✉ estalin.romero@unach.edu.ec
✉ smbonilla@espoch.edu.ec

ORCID:

https://orcid.org/0009-0000-0334-9863
https://orcid.org/0000-0001-6509-8238

FORMATO DE CITA APA.
Romero, E. & Bonilla, S. (2025). Diseño y modelado de un sistema de Manipulación Robótica controlado a distancia para el manejo seguro de sustancias químicas en entornos industriales. *Revista G-ner@ndo, V°6 (N°2). Pág. 2946 – 2962.*

Resumen

La globalización tecnológica ha impulsado el uso de robots industriales, pero su alto costo y el limitado conocimiento de sus modelos matemáticos frenan su desarrollo local. Objetivo: Desarrollar, simular y validar un modelo matemático de un brazo robótico antropomorfo de cuatro eslabones y tres grados de libertad, destinado a la manipulación segura de sustancias químicas peligrosas en la industria. Metodología: Se empleó un enfoque cuantitativo y descriptivo, basado en el método de Ángulos de Euler, para obtener la cinemática directa mediante matrices de transformación homogénea. El modelo fue implementado y verificado computacionalmente en Python, utilizando librerías especializadas (NumPy, SymPy y Matplotlib) para la resolución simbólica, simulación de trayectorias y análisis de error. Resultados: El modelo alcanzó una precisión del 99.10 % y un error euclidiano relativo de 0.90 %, evidenciando una alta concordancia entre la simulación y el modelo teórico, así como la fiabilidad del procedimiento propuesto. Conclusiones: El modelo desarrollado representa una herramienta robusta y eficiente para el diseño, validación y análisis cinemático de sistemas robóticos locales, ofreciendo una alternativa viable para la automatización segura de tareas en entornos industriales y químicos de alto riesgo.

Palabras clave: Modelado Matemático, Cinemática, Ángulos de Euler, Brazo Robótico.

Abstract

Technological globalization has accelerated the adoption of industrial robots; however, their high cost and the limited understanding of their underlying mathematical models constrain local development. Objective: To develop, simulate, and validate a mathematical model of a four-link anthropomorphic robotic arm with three degrees of freedom, intended for the safe handling of hazardous chemicals in industrial environments. Methodology: A quantitative and descriptive approach was applied, based on the Euler Angles method, to derive the forward kinematics using homogeneous transformation matrices. The model was computationally implemented and verified in Python, employing specialized libraries (NumPy, SymPy, and Matplotlib) for symbolic computation, trajectory simulation, and error analysis. Results: The proposed model achieved an accuracy of 99.10 % and a relative Euclidean error of 0.90 %, demonstrating a strong concordance between the computational simulation and the theoretical model, as well as the reliability of the proposed methodology. Conclusions: The developed model constitutes a robust and efficient tool for the design, validation, and kinematic analysis of local robotic systems, providing a viable alternative for the safe automation of tasks in high-risk industrial and chemical environments.

Keywords: Mathematical Modeling, Kinematics, Euler Angles, Robotic Arm.

Las obras que se publican en Revista Gner@ndo están bajo la licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional

Introducción

El uso de robots a nivel mundial ha trascendido el ámbito de la innovación tecnológica para convertirse en una herramienta esencial dentro de los procesos industriales, debido a su alta eficiencia y grado de automatización. Estos sistemas permiten ejecutar tareas repetitivas con precisión, reduciendo significativamente el margen de error humano que predominaba en etapas anteriores del desarrollo industrial. No obstante, la fabricación de un robot no se limita a los procesos de manufactura de sus componentes físicos, sino que requiere también del diseño y programación de su funcionamiento, áreas en las que intervienen tanto la cinemática como la dinámica para configurar su desempeño adecuado (Cruz & Simón-Marmolejo, 2020).

Un brazo robótico es un dispositivo electromecánico diseñado para mover, sostener o manipular objetos mediante el control de sus articulaciones y eslabones. Su implementación industrial ha permitido incrementar la velocidad de producción y disminuir los errores derivados de la intervención humana (Nicolás Alvarado Carrillo, 2019). La presente investigación se enfoca en el desarrollo matemático y el análisis cinemático de un brazo robótico esquemático, validado mediante simulación en el software Python.

La importancia de este estudio radica en que, aunque actualmente es posible adquirir robots en el mercado internacional, su alto costo representa una limitación para su implementación en el contexto nacional. Sin embargo, mediante la apropiación local del conocimiento sobre programación y diseño robótico, se puede fomentar la fabricación interna de este tipo de tecnologías. En este sentido, la investigación permite calcular trayectorias sin depender de la geometría específica del robot, empleando para ello el método de Ángulos de Euler, aplicado a partir de modelos generados en software CAD de esquematización (Morales et al., 2019).

El método de Ángulos de Euler se centra en la obtención de la matriz de transformación homogénea, una representación matemática que describe las trayectorias de un robot independientemente de sus grados de libertad. El procedimiento consiste en determinar las matrices de rotación en función de un sistema base u origen, establecer los vectores posición correspondientes y multiplicar los resultados para obtener la matriz global de transformación (Ortega Ordoñez, 2024).

De manera análoga, el método Denavit–Hartenberg también permite obtener la matriz de transformación homogénea, aunque basado en el análisis de parámetros geométricos como ángulos, distancias y articulaciones del robot. La diferencia fundamental radica en que el método de Ángulos de Euler prioriza la secuencia de rotaciones en cada etapa del movimiento (Barrientos et al., 2012).

Considerando la naturaleza repetitiva de las tareas industriales, el diseño del brazo robótico adoptado en esta investigación es antropomorfo, al inspirarse en la configuración del brazo humano. Esta característica facilita su replicación mediante tecnologías de manufactura aditiva, como la impresión 3D, o procesos convencionales de soldadura (Carrión Cevallos & Concha Arrieta, 2025).

El desarrollo de equipos y dispositivos propios constituye un elemento estratégico para el progreso tecnológico de un país. Aunque existen las condiciones locales para fabricar estructuras robóticas, persisten limitaciones en el conocimiento relacionado con el modelado cinemático y su aplicación funcional. Por ello, esta investigación propone un procedimiento matemático replicable, sustentado en simulaciones realizadas en Python, que permite describir con precisión las trayectorias del brazo robótico. Este modelo representa un insumo esencial para futuras etapas de fabricación y aplicación en ámbitos productivos, académicos y de emprendimiento (Barrientos et al., 2012).

El objetivo principal de esta investigación es desarrollar un modelo matemático que describa la cinemática directa de un brazo robótico antropomorfo mediante el método de Ángulos de Euler, validado mediante simulación computacional y análisis estadístico del error euclidiano relativo.

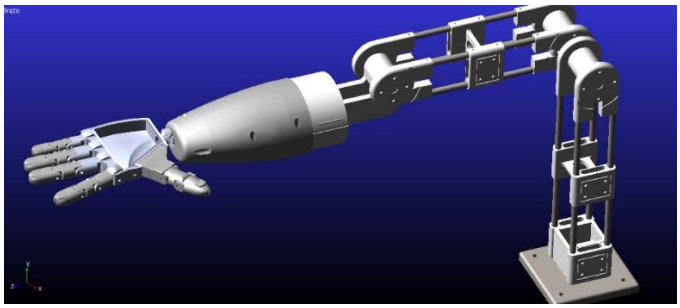
Métodos y Materiales

El presente trabajo se enmarca en una investigación cuantitativa, descriptiva y de carácter experimental-simulativo, orientada al desarrollo y validación de un modelo matemático para determinar posiciones y trayectorias finales de un brazo robótico de tres grados de libertad. Para ello se aplicaron métodos investigativos analíticos y computacionales: el análisis matemático formal, que permitió la formulación de las matrices de rotación y transformación homogénea descritas en las ecuaciones (1) a (7); y el método comparativo, utilizado para la validación mediante el cálculo del error euclidiano relativo. El desarrollo metodológico incluyó la definición geométrica y articular del sistema, la construcción del modelo cinemático mediante el método de Ángulos de Euler, la obtención de la matriz de transformación global y el cálculo del Jacobiano. Finalmente, el modelo fue verificado mediante simulación computacional en Python, comparando las posiciones obtenidas matemáticamente con las generadas en la simulación, cuyos errores individuales se presentan en la Tabla 2 (Avello, 2014).

Diseño del brazo robótico

El brazo robótico está compuesto por cuatro eslabones articulados, incluyendo una bancada que actúa como anclaje al lugar de trabajo, elementos de rotación, sujeciones y actuadores. Cada eslabón dispone de un motor con torque y rango de rotación definido. La cinemática del robot se analiza bajo condiciones de operación donde las velocidades son constantes y no se consideran vibraciones (Morales et al., 2019).

Figura 1. *Brazo robótico antropomorfo.*



Fuente: Elaboración propia

Formulación matemática del método de Ángulos de Euler

La matriz de transformación homogénea, acorde a las condiciones de operación y la geometría del brazo robótico, se obtiene mediante el método de Ángulos de Euler. Este método permite representar las rotaciones de cada eslabón según los ejes referenciados. Al aplicar este método, se obtienen las ecuaciones que describen las rotaciones fundamentales: la rotación alrededor del eje x, dada por la matriz $R_x\ (\propto)$ en la ecuación (1); la rotación alrededor del eje y, representada por la matriz $R_y\ (\beta)$ en la ecuación (2); y la rotación alrededor del eje z, definida mediante la matriz $R_z\ (\gamma)$ en la ecuación (3).

Estas matrices permiten describir la orientación de cada eslabón y se expresan como:

$$I_{R_F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

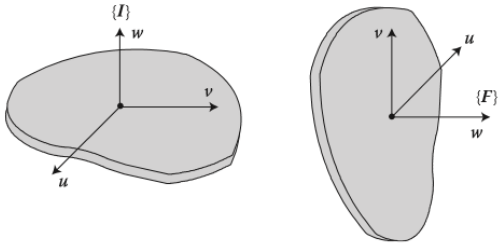
$$R_x\ (\propto) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\propto) & -Sin(\propto) \\ 0 & Sin(\propto) & Cos(\propto) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R_y\ (\beta) = \begin{bmatrix} Cos(\beta) & 0 & Sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sin(\beta) & 0 & Cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_z\ (\gamma) = \begin{bmatrix} Cos(\gamma) & -Sin(\gamma) & 0 \\ Sin(\gamma) & Cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Estas rotaciones permiten describir la orientación del eslabón en el espacio tridimensional, tal como se muestra en la Figura 2 (Mabell et al., 2024).

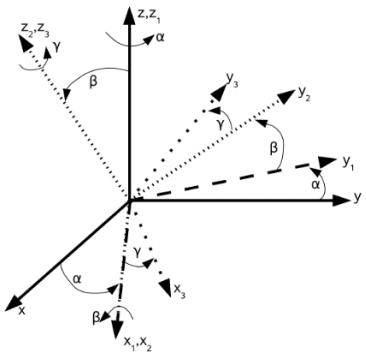
Figura 2. *Rotación con respecto a un eje.*



Fuente: Elaboración propia

Una vez obtenidas las matrices de rotación correspondientes a las uniones del robot, ecuaciones (1), (2) y (3), se determina la matriz global de rotación, la cual describe el movimiento final del mecanismo y está dada por la ecuación (4). Este proceso se representa mediante rotaciones sucesivas, como se ilustra en la Figura 3 (Avello, 2014).

Figura 3. *Rotaciones sucesivas.*



Fuente: Elaboración propia

Matriz de rotación global

$$R\,(\propto,\beta,\gamma)\;=\;R_x(\propto)\,R_Y(\beta)\;\;R_Z(\gamma) \qquad (4)$$

A partir de la matriz de rotación global de la ecuación (4) y de los vectores de posición de cada eslabón, se construye la matriz de transformación homogénea T, que combina la orientación y la posición relativa de cada eslabón respecto al sistema base.

La matriz global se obtiene multiplicando las matrices de transformación de cada articulación, como se muestra en la ecuación (5) (Hernández Sánchez, 2018):

$$T_4^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 \tag{5}$$

La multiplicación de estas matrices produce la matriz de posición global del robot, descrita en la ecuación (6):

$$^{n-1}T_n = \begin{bmatrix} cos\theta_n & -sin\theta_n cos\alpha_n & sin\theta_n sin\alpha_n & r_n cos\theta_n \\ sin\theta_n & cos\theta_n cos\alpha_n & -cos\theta_n sin\alpha_n & r_n sin\theta_n \\ 0 & sin\alpha_n & cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Posteriormente, la estructura general de la matriz homogénea completa se expresa según la ecuación (7):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & R & & T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{7}$$

La evaluación de la matriz T, permite determinar la posición final del mecanismo según la disposición analizada (Romero Estalin, 2021). A partir de esta matriz se calcula el Jacobiano, que posibilita obtener parámetros cinemáticos adicionales, como velocidades y aceleraciones. La ecuación (7) evidencia que la matriz R representa la rotación global, mientras que los valores cero y uno corresponden a configuraciones geométricas complementarias (Hernández Sánchez, 2018).

Cálculo del error euclidiano relativo

Para la validación del modelo, se calculan los errores individuales mediante la ecuación (8), se promedia (ecuación 9) y se determina la precisión global (ecuación 10). El cálculo del error total individual se realiza a partir de la comparación entre las coordenadas obtenidas del modelo matemático y las generadas por la simulación computacional, según la siguiente expresión:

$$Error\ total_i = \frac{\sqrt{(P_{x_m} - P_{x_s})^2 + (P_{y_m} - P_{y_s})^2 + (P_{z_m} - P_{z_s})^2}}{\sqrt{(P_{x_s})^2 + (P_{y_s})^2 + (P_{z_s})^2}} . (100) \tag{8}$$

$$Error\ total\ promedio = (\frac{1}{10}) \sum_{i=1}^{10} Error\ total_i \quad (9)$$

$$Precisión\ global = 100\% - Error\ total\ promedio \quad (10)$$

Para validar el modelo, se calcularon los errores individuales de cada punto en el espacio tridimensional (Tabla 2), se obtuvo su promedio y la precisión se expresó como la diferencia entre el 100 % y el error promedio, empleando el error euclidiano relativo para comparar el modelo y la simulación, donde P_{x_m},P_{y_m},P_{z_m}representan las coordenadas medidas, y P_{x_s},P_{y_s},P_{z_s} las coordenadas simuladas (Tofallis, 2021).

Parámetros geométricos y articulares utilizados

Los parámetros empleados en la simulación se presentan en las Tablas 1 y 2, incluyendo los ángulos de trabajo del brazo y las dimensiones antropomorfas de sus componentes (Jaramillo et al., 2016).

Tabla 1. *Parámetros de carga y movilidad de brazo***.**

Descripción	Parámetro
Hombro	± 20º y < 45º
Codo	Posición a 15º
Amplitud del brazo	< 170º
Amplitud del codo	<120°
Desviación de muñeca	<100°
Giro de muñeca	<120°
Carga sujeción vertical puño	<35 kg
Fuerza de agarre (estimada)	<16 kg
Distancia de agarre	<4-12 cm

Fuente: Elaboración propia a partir del modelo matemático y simulación en Python

Simulación computacional en Python

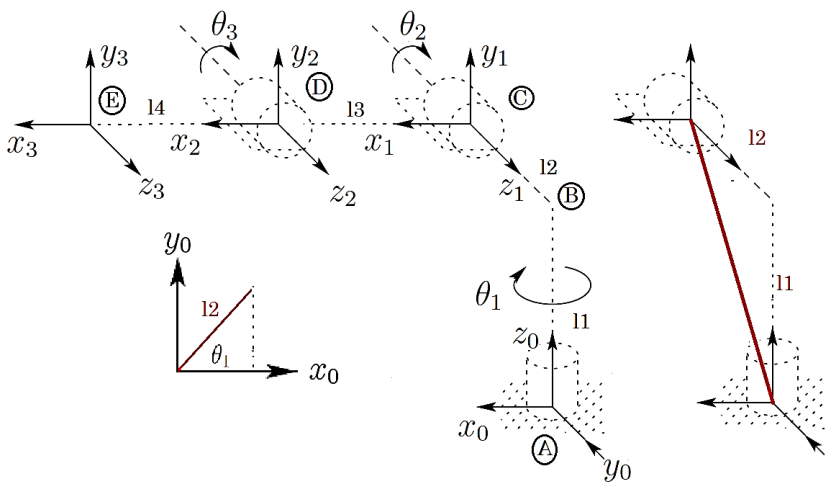
Una vez generado el modelo matemático, este se valida mediante PYTHON utilizando librerías especializadas, como SymPy, Matplotlib y NumPy, que permiten manipulación de matrices, generación de gráficos y desarrollo de ecuaciones. La

ejecución del modelo se realiza en varias etapas: primero, se obtienen los ángulos y medidas antropomorfas del brazo robótico; posteriormente, se plantean y calculan las matrices de rotación y posición; estas matrices se multiplican para obtener la expresión global de la matriz de transformación homogénea de la posición final del robot. Finalmente, se verifican y generan las trayectorias mediante las librerías mencionadas, evaluando la eficacia del modelo mediante la comparación entre los datos calculados y las simulaciones, así como la precisión final del modelo (Jaramillo et al., 2016).

Análisis de resultados

En la Figura 4. se observan los componentes que conforman la cadena cinemática del brazo robótico. La configuración del sistema destaca el eslabón *I*2, que presenta una excentricidad estructural. Asimismo, se confirma la existencia de cuatro eslabones y tres articulaciones que conforman el mecanismo.

Figura 4. *Cadena cinemática y eslabones.*



Fuente: Elaboración propia

Modelo matemático

De acuerdo con la metodología descrita por Romero Estalin (2021), se plantean las matrices de rotación correspondientes a los pares de articulaciones de la cadena cinemática, desde el sistema base (0) hasta el eslabón terminal (3).

Matrices de rotación de las articulaciones.

$$R_1^0 = R_1^0 R_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$R_2^1 = R_2^1 R_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$R_3^2 = R_3^2 R_3^2 \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Vectores de posición de cada eslabón

A partir de estas matrices se obtienen los vectores posición de cada eslabón, los cuales permiten determinar las ubicaciones espaciales y formular la matriz de transformación homogénea de cada par cinemático (Yime et al., 2017).

$$d_1^0 = \begin{bmatrix} l_2 c\theta_1 \\ l_2 s\theta_1 \\ l_1 \end{bmatrix}; d_2^1 = \begin{bmatrix} l_3 c\theta_2 \\ l_3 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}; d_3^2 = \begin{bmatrix} l_4 c\theta_3 \\ l_4 s\theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14-16)$$

Matriz de transformación homogénea global

La relación entre el sistema de referencia de la base y el efector final se obtiene mediante la multiplicación sucesiva de las matrices de transformación correspondientes a cada eslabón.

$$H_3^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2 & s\theta_1 \\ c\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -c\theta_2 s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 \\ c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_3 s\theta_2 & c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_2 s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} l_2 c\theta_1 + l_3 c\theta_1 c\theta_2 + l_4 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - l_4 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ l_2 s\theta_1 + l_3 c\theta_2 s\theta_1 + l_4 c\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 - l_4 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ l_1 + l_3 s\theta_2 + l_4 c\theta_2 s\theta_3 + l_4 c\theta_3 s\theta_2 \\ 1 \end{matrix} \quad (17)$$

Vector de posición del efector final

Del análisis de la matriz global se obtuvo el vector de posición del efector final:

$$d_3^0 = \begin{bmatrix} l_2c\theta_1 + l_3c\theta_1c\theta_2 + l_4c\theta_1c\theta_2c\theta_3 - l_4c\theta_1s\theta_2s\theta_3 \\ l_2s\theta_1 + l_3c\theta_2s\theta_1 + l_4c\theta_2c\theta_3s\theta_1 - l_4s\theta_1s\theta_2s\theta_3 \\ l_1 + l_3s\theta_2 + l_4c\theta_2s\theta_3 + l_4c\theta_3s\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

De esta manera, a partir de las matrices de rotación obtenidas para cada eslabón, se derivan los respectivos vectores de posición. De forma análoga, se determina el vector de posición final, el cual se encuentra directamente relacionado con la ubicación espacial del efector final en los ejes x, y, z (Ruderman et al., 2012).

$$d_3^0 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pl_2c\theta_1 + l_3c\theta_1c\theta_2 + l_4c\theta_1c\theta_2c\theta_3 - l_4c\theta_1s\theta_2s\theta_{3_x} \\ l_2s\theta_1 + l_3c\theta_2s\theta_1 + l_4c\theta_2c\theta_3s\theta_1 - l_4s\theta_1s\theta_2s\theta_3 \\ l_1 + l_3s\theta_2 + l_4c\theta_2s\theta_3 + l_4c\theta_3s\theta_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Análisis computacional

A partir de la ecuación general obtenida, se llevó a cabo la resolución computacional mediante el software Python, obteniéndose los resultados resumidos en la Tabla 2, correspondientes a los ángulos que producen el mayor alcance del brazo robótico. Los valores de referencia se establecieron para $q1$ en el rango de 0° a 90°, mientras que $q2$ y $q3$ se mantuvieron en cero.

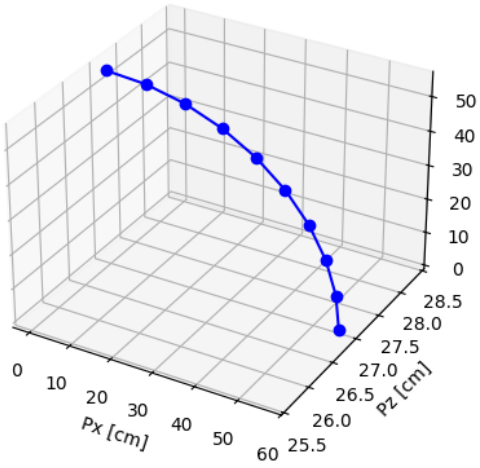
Las longitudes de los eslabones fueron definidas según criterios antropomorfos del brazo, fueron de 27, 8, 21 y 27 cm para $l1$, $l2$, $l3$y $l4$, respectivamente, con el propósito de dimensionar el espacio de trabajo proyectado del robot.

Cabe destacar que el modelo matemático desarrollado permite determinar los alcances para distintas configuraciones angulares, dado que los parámetros articulares pueden variar, mientras que las dimensiones de los eslabones se mantienen sin modificación (Ortega Ordoñez, 2024).

En la Figura 5 se muestra la trayectoria correspondiente al alcance máximo del brazo, obtenida a partir de los valores calculados con Python. Esta trayectoria, representada en función de los ejes coordenados, forma un arco que coincide

estrechamente con el obtenido mediante el software SolidWorks, utilizando los mismos ángulos articulares y longitudes de eslabones.

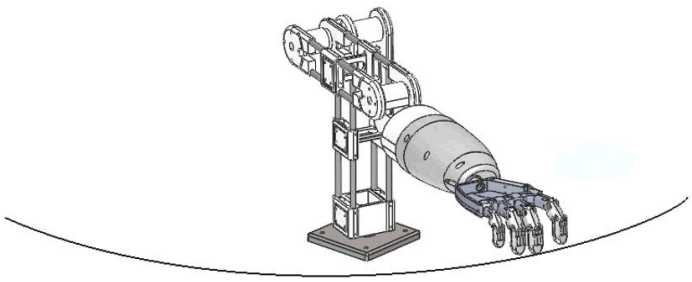
Figura 5. *Curva alcance máximo trayectoria brazo desde base q1*



Fuente: Elaboración propia

Por su parte, la Figura 6 presenta el modelo 3D del brazo robótico antropomorfo, mostrando la disposición de los eslabones y la geometría general del brazo, lo que permite visualizar claramente el rango de movimiento proyectado.

Figura 6. *Curva alcance máximo trayectoria brazo desde base q1*



Fuente: Elaboración propia

Asimismo, en la Tabla 2. se presentan los valores calculados tanto en el modelo matemático como en la simulación, junto con el error euclidiano relativo total correspondiente a cada configuración angular.

Tabla 2. *Datos teóricos y simulados.*

N°	ROTACIONES			MODELO			SIMULACIÓN			%ERROR TOTAL (i)
	q1(°)	q2(°)	q3(°)	Px	Py	Pz	Px	Py	Pz	
1	0	0	0	56.00	0.00	27.00	56.50	0	27.00	0.79
2	10	0	0	55.14	9.72	27.00	55.31	9.74	27.00	0.27
3	20	0	0	52.62	19.15	27.00	52.68	19.07	27.00	0.16
4	30	0	0	48.49	28.00	27.00	48.18	28.00	27.00	0.50
5	40	0	0	42.89	35.99	27.00	41.01	35.70	27.00	3.13
6	50	0	0	35.99	42.89	27.00	36.69	42.60	27.00	1.21
7	60	0	0	28.00	48.49	27.00	28.92	48.31	27.00	1.50
8	70	0	0	19.15	52.62	27.00	19.50	52.61	27.00	0.56
9	80	0	0	9.72	55.14	27.00	9.26	55.34	27.00	0.80
10	90	0	0	0.00	56.00	27.00	0	56.06	27.00	0.09

Fuente: Elaboración propia.

Validación

Dado que el modelo propuesto genera tres componentes correspondientes a las coordenadas tridimensionales, se calcularon los errores individuales mediante la ecuación (8). A partir de estos valores, se obtuvo el error total promedio según la ecuación (9), resultando en 0.90. La precisión global se determinó mediante la ecuación (10), obteniéndose 99.10 %, lo que demuestra un desempeño alto del modelo respecto a la simulación computacional.

$$Error\ total\ promedio = \left(\frac{1}{10}\right)(9.01) = 0.90$$

$$Precisión\ global = (100 - 0.901)\% = 99.10\%$$

Discusión

El modelo matemático desarrollado, basado en el método de Ángulos de Euler para la cinemática directa de un brazo robótico antropomorfo de cuatro eslabones y tres grados de libertad, demostró una alta coherencia entre la teoría, la simulación computacional y el diseño CAD del manipulador. Las matrices de rotación y transformación homogénea permitieron determinar con precisión la posición del efector final en el espacio tridimensional para distintas configuraciones angulares.

Los resultados cuantitativos obtenidos evidencian una precisión global del 99.10 % y un error total promedio de 0.90, indicando estabilidad numérica y robustez de las expresiones matemáticas empleadas.

La comparación con el modelo 3D generado en SolidWorks reveló una concordancia sustancial entre la trayectoria proyectada del efector final y la calculada mediante Python. Esto confirma que las funciones $P_x(\theta), P_y(\theta), P_z(\theta)$, representan de manera adecuada la relación entre los ángulos articulares y la posición espacial del robot, validando la consistencia algebraica y geométrica del modelo teórico.

Además, los resultados se alinean con estudios previos sobre modelado de brazos robóticos mediante matrices de transformación homogénea (Barrientos et al., 2012; Carrión Cevallos & Concha Arrieta, 2025), lo que respalda la fiabilidad del procedimiento y demuestra que las transformaciones sucesivas constituyen un método suficiente y sistemático para representar la cinemática directa de manipuladores antropomorfos.

Desde la perspectiva de simulación y diseño, la implementación computacional permitió evaluar de manera eficiente diversas configuraciones angulares sin recurrir a prototipos físicos, minimizando costos y facilitando la verificación de conceptos. La trayectoria tridimensional obtenida presenta continuidad y diferenciabilidad, características fundamentales para estudios de planificación de movimiento, optimización de trayectorias y control cinemático.

En síntesis, el modelo matemático desarrollado demuestra concordancia con la teoría, estabilidad numérica y alta precisión en la posición del efector final, constituyéndose en una herramienta confiable para simulación, diseño CAD y planificación de trayectorias en aplicaciones industriales de alto riesgo.

Conclusiones

El modelo cinemático desarrollado permitió formular de manera precisa las funciones de posición del efector final $P_x(\theta), P_y(\theta), P_z(\theta)$, a partir de matrices de rotación y transformación homogénea. Esta formulación asegura que las trayectorias calculadas son continuas, diferenciables y geométricamente coherentes, garantizando un comportamiento estable del manipulador en el espacio tridimensional.

La validación computacional mostró un error euclidiano relativo promedio de 0.90 % y una precisión global del 99.10 %, confirmando la exactitud y robustez del modelo matemático desarrollado. Estos resultados evidencian que las ecuaciones derivadas representan fielmente la cinemática directa del brazo robótico, permitiendo estimar con precisión la posición del efector final en distintas configuraciones angulares.

Desde el punto de vista matemático, las funciones $P_x(\theta), P_y(\theta), P_z(\theta)$ garantizan trayectorias suaves y sin singularidades, lo que las hace adecuadas para análisis de alcance, planificación de movimientos y optimización de trayectorias de manipuladores robóticos. Además, la concordancia entre los resultados analíticos y la simulación computacional valida la correcta implementación algebraica y geométrica del modelo.

En conjunto, el modelo constituye una herramienta matemática sólida y confiable, que no solo permite la simulación de trayectorias tridimensionales, sino que también proporciona una base formal para estudios futuros de diseño, control y optimización de brazos robóticos en entornos industriales.

Referencias bibliográficas

Avello, A. (2014). Teoría de máquinas (2.ª ed.). Universidad de Navarra. https://dadun.unav.edu/server/api/core/bitstreams/1cc3a011-3c4b-4351-82f5-344784a8de3b/content

Barrientos, A., Álvarez, M., Hernández, J. D., Del Cerro, J., & Rossi, C. (2012). Modelado de cadenas cinemáticas mediante matrices de desplazamiento: Una alternativa al método de Denavit–Hartenberg. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1697791212000623

Carrión Cevallos, M. A., & Concha Arrieta, J. C. (2025). Desarrollo del modelo matemático para un brazo robótico de tres eslabones con un grado de libertad en cada eslabón. Technology Rain Journal, 4(1). https://doi.org/10.55204/trj.v4i1.e65

Cruz, E. M., & Simón-Marmolejo, I. (2020). Diseño y construcción de brazo robótico para línea de producción entrenadora. https://www.researchgate.net/publication/360919108

Hernández Sánchez, J. (2018). Técnicas Modernas en Automática. Universidad Técnica Federico Santa María. http://www2.elo.utfsm.cl/~elo377/documentos/TMA-RoboticaJHS.pdf

Jaramillo, G., Villa, S. J., & Paúl, T. E. (2016). Prototipado y construcción mediante impresión en 3d de un brazo inalámbrico para procesos industriales de alto riesgo. https://dspace.espoch.edu.ec:8080/server/api/core/bitstreams/2978808a-7bee-4340-b2ef-d9afae8b39ef/content

Mabell, N., Figueroa, S., Adrian, A., Figueroa, M., Jair, D., & Tomalá, S. (2024). Advanced simulation of a robotic arm with 2 degrees of freedom, controlled in simscape. Revista América Latina " (Vol. 1, Issue 6). https://doi.org/10.61582/r8jr5194

Morales, K., Hoyos, C., & García, J. M. (2019). Diseño y optimización de la estructura mecánica de un brazo robótico antropomórfico desarrollado con fines educativos. Revista UIS Ingenierías, 18(4), 193–208. https://doi.org/10.18273/revuin.v18n4-2019017

Nicolas Carrillo; Yamil Gualteros. (2019). Diseño de un brazo robótico para utilizar en un laboratorio de automatización. https://repository.uamerica.edu.co/server/api/core/bitstreams/30b75a9a-6b09-4b4d-8f45-0c119dfe4512/content

Ortega Ordoñez, R. C. (2024). Brazo Robótico de Tres Articulaciones Mediante Servomotores con Tecnología Arduino. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 8(1), 3099–3113. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1.9639

Romero Estalin. (2021). Diseño y simulación de un brazo robótico remotamente controlado; para manipulación de sustancias especiales en procesos industriales. https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/4589438

Ruderman, M., Hoffmann, F., & Bertram, T. (2012). A Matlab-based framework for

the remote control of a 6-DOF robotic arm for education and research in control theory. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 9(PART 1), 366–371. https://doi.org/10.3182/20120619-3-RU-2024.00059

Tofallis, C. (2021). A better measure of relative prediction accuracy for model selection and model estimation. Journal of the Operational Research Society, 66(8), 1352–1362. https://arxiv.org/abs/2105.05249

Yime, E., Roldán Mckenley, J., & Villa Ramirez, J. L. (2017). Computed torque control of a 2-RR planar parallel robot // Control por par calculado de un robot paralelo planar 2-RR. Prospectiva, 15(2), 85–95. https://doi.org/10.15665/rp.v15i2.1111.