

**El Proceso de Enseñanza - Aprendizaje de las Integrales Definidas en el tercer Año de Bachillerato
The Teaching-Learning Process of Definite Integrals in the 3rd Year of High School**

Marco Vinicio Tigse Comina, Julio Felipe García Herrera.

**INNOVACIÓN Y CONVERGENCIA:
IMPACTO MULTIDISCIPLINAR**

Enero - Junio, V°6 - N°1; 2025

- ✓ Recibido: 26/02/2025
- ✓ Aceptado: 27/02/2025
- ✓ Publicado: 30/06/2025

PAÍS

- Ecuador – Cotopaxi
- La Habana, Cuba

INSTITUCIÓN

- Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona
- Dirección de Planificación de la Universidad, Profesor Auxiliar, La Habana, Cuba

CORREO:

- ✉ marco.tigse1.c@gmail.com
- ✉ juliofgh@ucpejv.edu.cu

ORCID:

- 🌐 <https://orcid.org/0009-0005-6275-5075>
- 🌐 <https://orcid.org/0000-0002-4688-5831>

FORMATO DE CITA APA.

Tigse, M. García, J. (2025). El Proceso de Enseñanza - Aprendizaje de las Integrales Definidas en el tercer Año de Bachillerato. Revista G-ner@ndo, V°6 (N°1). 1851 – 1875.

Resumen

El presente trabajo de investigación propone una estrategia didáctica dirigida a favorecer el proceso de enseñanza – aprendizaje de las integrales definidas en los estudiantes del tercer Año de Bachillerato en el Ecuador. Se ha abordado este tema educativo en la búsqueda de cómo contribuir a favorecer el proceso de enseñanza – aprendizaje de las integrales definidas en los estudiantes; Para ello se ha utilizado métodos teóricos, empíricos y estadísticos para recolectar, analizar y procesar toda la información. No obstante, en la búsqueda de una solución al problema se ha hallado dificultades que presentan los estudiantes para analizar, representar, visualizar y experimentar con los conceptos abstractos de las integrales definidas. La implementación de la estrategia didáctica ha demostrado ser eficaz para mejorar la comprensión de temas complejos. Python contribuyó al desarrollo de competencias en programación, así como preparar a los estudiantes para los desafíos tecnológicos y científicos contemporáneos donde podrán realizar cálculos y observar su representación gráfica real, lo que promueve un aprendizaje activo y experimental. Sin embargo, los resultados también revelaron la necesidad de una capacitación docente para optimizar el uso de estas herramientas, así como un enfoque gradual en la introducción de estos recursos en la enseñanza.

Palabras clave: Estrategia didáctica, aprendizaje, integrales, python, programación.

Abstract

This research proposes a didactic strategy aimed at promoting the teaching-learning process of definite integrals in 3rd year high school students in Ecuador. This educational topic has been addressed in the search for how to contribute to promoting the teaching-learning process of definite integrals in students; To do so, theoretical, empirical and statistical methods have been used to collect, analyze and process all the information. However, in the search for a solution to the problem, difficulties have been found that students present to analyze, represent, visualize and experiment with the abstract concepts of definite integrals. The implementation of the didactic strategy has proven to be effective in improving the understanding of complex topics. Python contributed to the development of programming skills, as well as preparing students for contemporary technological and scientific challenges where they will be able to perform calculations and observe their real graphical representation, which promotes active and experimental learning. However, the results also revealed the need for teacher training to optimize the use of these tools, as well as a gradual approach in introducing these resources into teaching.

Keywords: Teaching strategy, learning, integrals, python, programming.

Introducción

En Ecuador, el Ministerio de Educación ha evaluado el rendimiento académico en Matemática a nivel de bachillerato, registrando una evolución en las calificaciones promedio: 7,51 en el periodo 2018-2019, 7,93 en 2019-2020, 8,31 en 2020-2021 y 8,16 en 2021-2022 (Educación, 2023). A nivel regional, según la UNESCO y el Estudio Regional Comparativo (ERCE), Ecuador obtuvo 709 puntos sobre 1000 en Matemática para tercer grado y 720 puntos para sexto grado, evidenciando diferencias significativas respecto a países como Cuba, Uruguay y Perú (UNESCO, 2019). No obstante, estudios recientes indican que el 75% de los jóvenes sudamericanos de 15 años no alcanzan las competencias mínimas en esta área (Arias et al., 2023), lo que resalta la necesidad de implementar estrategias didácticas que mejoren la enseñanza de Matemática.

En este contexto, se ha identificado que la enseñanza de las integrales definidas en el tercer año de bachillerato presenta dificultades tanto en la metodología utilizada por los docentes como en la comprensión y resolución de ejercicios por parte de los estudiantes. La observación directa y entrevistas a docentes revelaron problemas específicos, como la falta de estrategias efectivas y la dificultad para plantear y resolver ejercicios de integración. A partir de esta problemática, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo contribuir a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales definidas en los estudiantes del tercer año de bachillerato en Ecuador?

El estudio tiene como objetivo general proponer una estrategia didáctica que facilite el aprendizaje de las integrales definidas en este nivel educativo. Para ello, se establecieron cuatro ejes de análisis: la revisión de referentes teórico-metodológicos, la caracterización del estado actual de la enseñanza de las integrales en la Unidad Educativa Moraspungo, el diseño de la estrategia didáctica y su valoración a través de la consulta a especialistas y pruebas diagnósticas.

La investigación empleó métodos teóricos como el análisis histórico-lógico, el enfoque analítico-sintético, el método inductivo-deductivo y la revisión documental. A nivel empírico, se realizaron observaciones en el aula, encuestas a docentes y estudiantes, entrevistas a especialistas y pruebas pedagógicas. Asimismo, se aplicó un diseño pre-experimental con un grupo de estudiantes del tercer año de bachillerato de la Unidad Educativa Moraspungo. En cuanto al análisis de datos, se utilizaron técnicas estadísticas como la distribución de frecuencias, medidas de tendencia central y estadística descriptiva. El aporte principal de este estudio radica en la propuesta de una estrategia didáctica innovadora para mejorar la enseñanza de las integrales definidas, contribuyendo a fortalecer el proceso de aprendizaje en el bachillerato.

Métodos y Materiales

El análisis del estado inicial del proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales definidas en el tercer Año de Bachillerato es crucial para entender cómo se imparte este tema en el contexto del currículo ecuatoriano. Este análisis tiene como objetivo identificar las dificultades que enfrentan tanto estudiantes como docentes, así como las áreas de mejora en la enseñanza de las integrales definidas. Para ello, se diseñaron instrumentos de recolección de datos que abordan tres aspectos clave: los conocimientos previos de los estudiantes, los métodos pedagógicos utilizados y la percepción de los involucrados sobre el proceso de aprendizaje.

Se emplearán tres principales instrumentos: entrevistas a docentes, una prueba diagnóstica a estudiantes y observación directa de clases. Las entrevistas, realizadas de forma semiestructurada, permitirán obtener información cualitativa sobre las estrategias didácticas y las dificultades más comunes que enfrentan los estudiantes. La prueba diagnóstica evaluará los conocimientos previos de los estudiantes, enfocándose en funciones, límites y derivadas, mediante ejercicios teóricos y prácticos. Por último, la observación de clases proporcionará información en tiempo real sobre la interacción entre docentes y estudiantes, y los métodos utilizados en la enseñanza de las integrales definidas.

La recolección y presentación de los datos se llevará a cabo de manera sistemática. Los datos cualitativos obtenidos de las entrevistas se categorizarán y analizarán mediante codificación abierta, mientras que los resultados de la prueba diagnóstica se analizarán utilizando estadísticas descriptivas, presentándose en tablas y gráficos. La información obtenida de las observaciones se resumirá descriptivamente, destacando patrones y comportamientos comunes en el aula.

En cuanto a los procedimientos éticos, se garantizará la confidencialidad y el bienestar de los participantes. Todos los involucrados recibirán información sobre los objetivos y procedimientos del estudio, y se les solicitará su consentimiento informado antes de la aplicación de los instrumentos. Los resultados se mantendrán de forma anónima y solo se utilizarán con fines investigativos.

La población objeto de estudio está conformada por los estudiantes del Bachillerato de la Unidad Educativa Moraspungo, específicamente aquellos de tercer año, quienes están cursando el tema de las integrales definidas. La muestra estará compuesta por 31 estudiantes de esta categoría, además de tres docentes de Matemáticas que participarán en las entrevistas. La selección de esta muestra permitirá obtener información específica y relevante para evaluar el estado inicial del proceso de enseñanza-aprendizaje y diseñar una estrategia didáctica adecuada.

Análisis de Resultados

El sistema educativo ecuatoriano ha implementado reformas para mejorar la calidad y equidad en la enseñanza, promoviendo un enfoque constructivista donde el estudiante es el centro del aprendizaje y el docente actúa como facilitador (Posligua & Navarrete, 2022). La introducción de metodologías activas, como el aprendizaje basado en problemas y el cooperativo, ha favorecido la participación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje (Villamar & Sánchez, 2022). Además, la tecnología ha adquirido un papel

fundamental en la educación, permitiendo nuevas formas de interacción y acceso a información global (Hernández & Samada, 2021).

En el ámbito de las matemáticas, la enseñanza de las integrales definidas en el tercer año de bachillerato representa un desafío debido a su complejidad y abstracción. El currículo ecuatoriano establece que los estudiantes deben comprender su relación con el cálculo diferencial e interpretar su significado geométrico y físico. Para facilitar su aprendizaje, los docentes suelen recurrir a representaciones gráficas, ejemplos prácticos y problemas contextualizados (Álava et al., 2023). Además, herramientas tecnológicas como Python y GeoGebra han demostrado ser eficaces para visualizar y resolver integrales de manera interactiva, fomentando la autonomía en el aprendizaje (Ojeda et al., 2020).

Python se ha convertido en una herramienta clave para la enseñanza de las integrales, dado que permite a los estudiantes resolver problemas, graficar funciones y visualizar áreas bajo la curva de forma dinámica. Bibliotecas como Matplotlib, NumPy y SymPy facilitan el cálculo simbólico y la representación gráfica de funciones, promoviendo un aprendizaje experimental (Hernández et al., 2024). Además, el uso de Python en el aula no solo mejora la comprensión de conceptos matemáticos, sino que también introduce a los estudiantes en el mundo de la programación, ampliando sus competencias en un entorno digitalizado (Rodríguez et al., 2022). De esta manera, la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las integrales definidas refuerza el aprendizaje y prepara a los estudiantes para desafíos académicos y profesionales.

La asignatura de matemáticas desempeña un papel crucial en la formación integral de los estudiantes de Bachillerato, puesto que no solo les brinda herramientas para resolver problemas cuantitativos, sino que también promueve habilidades como el pensamiento crítico, lógico y abstracto. Estas habilidades son esenciales para que los estudiantes puedan enfrentar con éxito los desafíos de la vida profesional y cotidiana (Cevallos & Mestre, 2023). A través de la resolución de problemas matemáticos complejos, los estudiantes desarrollan capacidades como la

perseverancia, la disciplina y la toma de decisiones informadas, lo que fomenta su resiliencia y adaptabilidad. Además, la enseñanza de matemáticas en este nivel se interrelaciona con otras disciplinas, promoviendo una visión más amplia del conocimiento y demostrando la relevancia de las matemáticas en la solución de problemas reales (Betancourt & Cordero, 2024).

El estudio de las integrales definidas en el Bachillerato contribuye a este proceso de formación integral, debido a que no solo se enfoca en enseñar técnicas matemáticas, sino en desarrollar competencias analíticas, de razonamiento lógico y de resolución de problemas complejos (Buñay, 2024). Este conocimiento permite a los estudiantes aplicar las matemáticas en diversas áreas, como la física y la economía, fortaleciendo su comprensión de cómo las integrales se aplican en contextos prácticos y reales (Bedón, 2021).

Sin embargo, el estado inicial del proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales definidas presenta varios desafíos. Muchos estudiantes llegan a este nivel con dificultades en conceptos previos esenciales, como las derivadas, lo que afecta su comprensión de las integrales. Además, el enfoque pedagógico tradicional en muchas aulas no favorece una comprensión profunda, puesto que se centra en la memorización de fórmulas en lugar de promover un aprendizaje activo y contextualizado (Quintanchala, 2024). La integración limitada de tecnologías educativas también restringe la visualización y comprensión dinámica de las integrales (Llanes, 2020).

Para mejorar la enseñanza de las integrales definidas, es fundamental emplear enfoques pedagógicos como el constructivismo, el aprendizaje basado en problemas y la enseñanza activa. Estos enfoques permiten a los estudiantes interactuar activamente con los conceptos, resolver problemas prácticos y utilizar herramientas tecnológicas que faciliten la visualización de conceptos abstractos (Arias et al., 2023; Bedón, 2021). Sin embargo, existen dificultades comunes, como la falta de dominio de conceptos previos y la necesidad de mayor apoyo visual, que dificultan la comprensión de las integrales definidas. El uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra y Wolfram Alpha puede ayudar a los estudiantes a superar estas barreras,

ofreciendo enfoques visuales que complementan los métodos tradicionales de enseñanza (Cevallos & Mestre, 2023; Quintanchala, 2024).

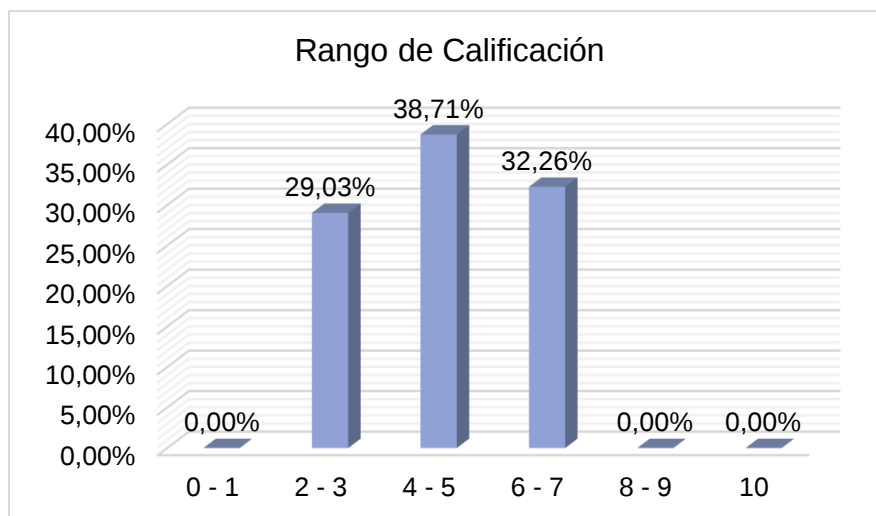
El estudio de la entrevista con tres docentes de matemáticas de la Unidad Educativa Moraspungo revela diversas percepciones sobre las dificultades y estrategias en la enseñanza de las integrales definidas en Bachillerato. Los docentes identificaron dificultades en la comprensión de conceptos previos, como límites y derivadas, lo que afecta la capacidad de los estudiantes para entender y aplicar las integrales. A pesar de usar métodos tradicionales como ejercicios gráficos y repetitivos, todos los docentes coincidieron en que la incorporación de herramientas tecnológicas, particularmente Python, podría mejorar la interacción y comprensión visual de los conceptos. Se destacó que la visualización gráfica y el enfoque práctico de Python podrían motivar a los estudiantes, pero también se señaló la necesidad de introducir estas herramientas de manera gradual para evitar frustración en estudiantes sin experiencia en programación. Además, se mencionó que Python podría ofrecer evaluaciones más dinámicas y visuales, lo que permitiría una mejor medición del progreso de los estudiantes. Finalmente, los docentes sugirieron la capacitación de docentes y estudiantes para implementar estas tecnologías de forma efectiva y propusieron combinar Python con herramientas como GeoGebra para potenciar el aprendizaje visual e interactivo. Esta recomendación refleja la necesidad de un enfoque gradual y bien estructurado para integrar herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas, haciendo el proceso más accesible, motivador y aplicable a situaciones prácticas.

Los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a 31 estudiantes del 3ro Ciencias "B" de Bachillerato en la Unidad Educativa Moraspungo reflejan dificultades significativas en la comprensión de las integrales definidas. La mayoría de los estudiantes obtuvo calificaciones en los rangos bajos (2-3 y 4-5 puntos), lo que sugiere un conocimiento parcial e insuficiente de los conceptos previos y la aplicación de las integrales. El 29,03% de los estudiantes obtuvo entre 2 y 3 puntos, indicando serias dificultades con los fundamentos básicos necesarios para abordar el tema. Un 38,71% obtuvo entre 4 y 5 puntos, lo que señala un conocimiento limitado pero

insuficiente para aprobar. El 32,26% de los estudiantes alcanzó entre 6 y 7 puntos, lo que indica una comprensión aceptable de los conceptos esenciales. Sin embargo, ninguno de los estudiantes alcanzó un rango de 8 a 10 puntos, lo que refleja la ausencia de un dominio avanzado de los temas, lo que sugiere que aún existen vacíos significativos en su comprensión y aplicación de las integrales definidas. Estos resultados apuntan a la necesidad de ajustar las estrategias de enseñanza, considerando la incorporación de herramientas interactivas como Python, que podrían ayudar a los estudiantes a visualizar y experimentar con los conceptos de manera práctica. El uso de estas herramientas podría mejorar la comprensión y aplicación de conceptos complejos y superar las deficiencias observadas en los rangos más bajos.

Figura 1

Resultados de la Prueba Diagnóstica



Los resultados de la observación de la clase sobre integrales definidas revelan varios aspectos críticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El enfoque tradicional, basado principalmente en la explicación del docente y ejercicios individuales en la pizarra, muestra limitaciones en términos de participación estudiantil y comprensión profunda de conceptos avanzados. La participación fue limitada, con pocos estudiantes respondiendo y haciendo

preguntas, lo cual puede estar relacionado con la complejidad del tema y la falta de herramientas interactivas que hagan el aprendizaje más accesible.

Aunque las explicaciones del docente fueron claras en los conceptos básicos, hubo dificultades al explicar la interpretación gráfica de las integrales. Este aspecto es crucial para la comprensión completa del tema, especialmente para visualizar áreas bajo la curva. La falta de recursos tecnológicos avanzados, como Python o GeoGebra, fue un punto débil evidente, debido a que estas herramientas podrían haber facilitado la visualización y comprensión de las integrales de manera más dinámica y comprensible. Sin estas herramientas, los estudiantes se limitaron a una memorización de fórmulas y resolución mecánica de problemas.

Además, los estudiantes enfrentaron dificultades para aplicar conceptos abstractos a situaciones prácticas, lo que muestra que un enfoque más participativo y colaborativo podría mejorar su aprendizaje. Integrar tecnología, como software interactivo, y fomentar actividades grupales podrían no solo hacer las clases más atractivas, sino también reforzar el aprendizaje conceptual, ayudando a los estudiantes a superar los desafíos asociados con la interpretación gráfica y la aplicación de las integrales en contextos reales.

Estrategia didáctica para favorecer el proceso de enseñanza – aprendizaje de las integrales definidas en el tercer Año de Bachillerato

La estrategia didáctica propuesta está orientada a estudiantes de bachillerato, con el objetivo de mejorar la comprensión y el aprendizaje de las integrales definidas mediante el uso de la programación en Python. La propuesta considera que los estudiantes deben no solo aprender a calcular integrales, sino también a interpretar gráficamente el área bajo la curva de una función. El diseño de la estrategia incluye actividades graduales que inician con la introducción a conceptos básicos de programación y finalizan con la implementación de scripts para el cálculo y graficación de integrales definidas. Se utilizan librerías de Python como sympy, numpy, y matplotlib para estos fines. Además de los cálculos manuales, los estudiantes comparan sus resultados con los obtenidos a través de Python, lo que refuerza tanto el

entendimiento matemático como computacional. Las actividades fomentan el aprendizaje experimental, permitiendo a los estudiantes explorar cómo los cambios en los límites o funciones afectan las integrales, lo que promueve la autoexploración y el aprendizaje colaborativo. Los estudiantes no solo calculan integrales, sino que también visualizan el área bajo la curva, comprendiendo mejor las aplicaciones de este concepto en disciplinas como la física y la economía.

Resolver ejercicios de cálculo integral con la ayuda del programa Python como herramienta para favorecer el proceso de enseñanza – aprendizaje de las integrales definidas en el tercer Año de Bachillerato. Definir conceptos básicos de integrales y de scripts de programación.

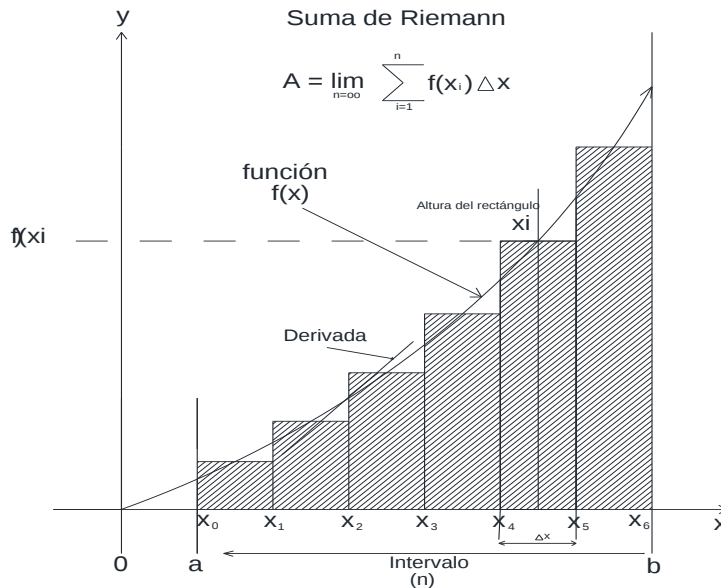
Implementar scripts para el cálculo y graficación de integrales definidas en el programa Python como un recurso para luego comprobar estos resultados mediante el cálculo manual.

Evaluar la comprensión de integrales definidas de manera manual como base para la aplicación y solución de nuevos ejercicios de integración. El método de Riemann; Se define como una aproximación al valor de la integral definida mediante la suma finita de las áreas de los rectángulos dentro de un determinado intervalo.

Este método consiste en distribuir el intervalo completo (ab) en secciones más pequeñas (x_i) con la finalidad de formar pequeños rectángulos que tengan una base (Δx) y una altura $f(x_i)$ que toque a la línea de la gráfica de la función $f(x)$ y así poder calcular el área de uno de estos rectángulos aplicando la fórmula básica $(A = bxh)$ que es equivalente a $(A = f(x_i)\Delta x)$; Una vez calculada el área de uno de los rectángulos se sumará $(\Sigma.)$ la cantidad total de rectángulos, y esta será el área aproximada de la integral definida; Mientras mayor sea el número de rectángulos $(i = 1 \rightarrow n)$ más se aproximará a la respuesta.

Figura 2

Representación de la suma de Riemann



Elaboración propia (2025).

Integral

La integral se define como $\int f(x) = F(x) + C$ por ende, se concibe como un proceso inverso a la derivación más la adición de una constante. El área estará compuesta por un conjunto de infinitas primitivas que se aproximarán a la respuesta.

$$\int f(x) = F(x) + C \quad (1)$$

Dónde:

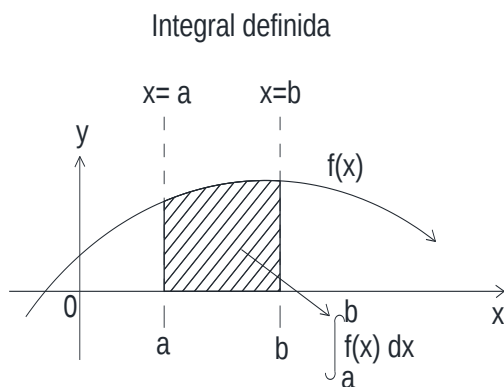
 $\int$ = Símbolo de integración. $f(x)$ = Función con respecto a (x). C = Constante. $F(x)$ = Es la integral de $f(x)$. $f(x)$ = Es la derivada de $F(x)$.

Integral definida

La integral definida se conceptúa como el área bajo la curva de una determinada función en un intervalo dado; Este intervalo debe estar comprendido entre un límite inferior denominado (a) y un límite superior llamado (b).

Figura 3

Representación de la integral definida



Elaboración propia (2025).

Fórmula de la potencia para resolver integrales definidas.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}; n \neq -1 \quad (2)$$

Dónde:

$\int_a^b$ = Símbolo de integración.

a = Límite inferior de la integral.

b = Límite superior de la integral.

x^n = Función f(x).

n = Exponente de la función f(x).

Regla de Barrow para calcular integrales definidas comprendida entre dos límites cerrados.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3)$$

Dónde:

$\int_a^a$ = Símbolo de integración.

a = Límite inferior de la integral.

b = Límite superior de la integral.

f(x) = Función a ser evaluada.

F(b) = Representa la expresión algebraica reemplazada con el límite superior (a).

F(a) = Representa la expresión algebraica reemplazada con el límite inferior (b).

Python

Python es un lenguaje de programación ampliamente utilizado en diversas áreas de las ciencias, destacándose en análisis de datos, automatización de procesos y desarrollo de software. Su sintaxis fácil de comprender lo convierte en una herramienta accesible para todo tipo de usuarios. Python se apoya en librerías que se instalan según las necesidades del proyecto.

Entre las principales librerías de Python se encuentran:

1. Sympy: Librería matemática que permite realizar cálculos simbólicos, como integrales y derivadas, mediante el uso de símbolos y funciones matemáticas.
2. Numpy: Librería especializada en el manejo de datos numéricos y arreglos multidimensionales. Es útil para cálculos matemáticos y la definición de rangos numéricos dentro de intervalos.
3. Matplotlib: Librería para la creación de gráficos y visualización de datos, permitiendo representar el comportamiento de los datos en gráficos interactivos o estáticos.

Estas librerías hacen que Python sea una herramienta poderosa para la resolución de problemas matemáticos y la visualización de resultados.

Actividades de la propuesta

La propuesta contine 4 actividades, distribuidas cada una en tres secciones como se muestra a continuación:

- Acciones para el estudiante.
- Acciones para el docente.
- Acciones para el grupo en general.

Las actividades de la propuesta se amplían detalladamente en el apartado 2.3 donde se muestra la implementación de la estrategia didáctica.

Evaluación

El Currículo Educativo establece que los estudiantes deben ser capaces de aplicar álgebra de límites como base para el cálculo diferencial e integral. Como destreza prioritaria, los estudiantes deben calcular la integral definida de una función escalonada, tanto cuando sus límites son iguales como cuando se intercambian los límites de integración. Además, deben concebir la integración como un proceso inverso de las derivadas y realizar su análisis geométrico y físico (Currículo priorizado, 2022). Para evaluar estos criterios, se diseñaron diez preguntas que abordan estos conceptos, detalladas en el Anexo 4 de la Evaluación de la Propuesta.

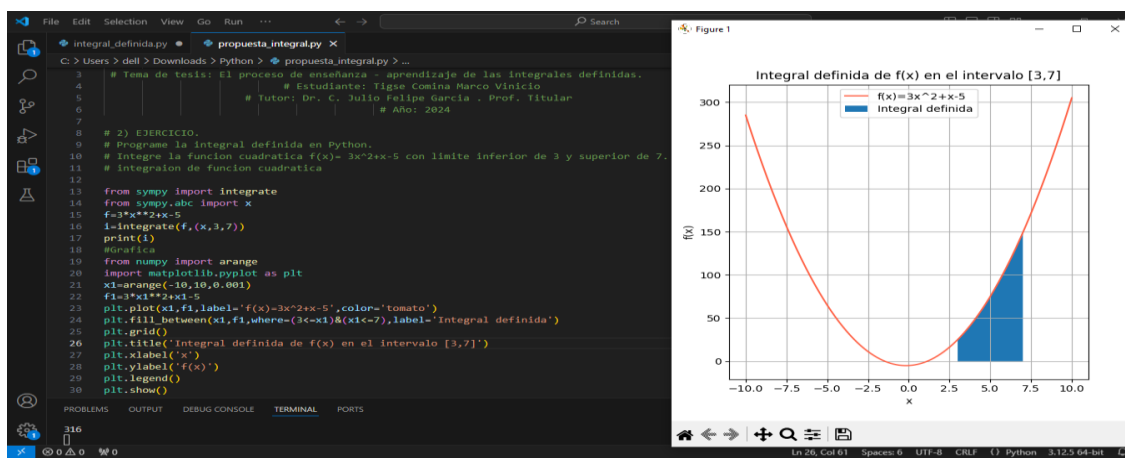
Implementación de la Estrategia Didáctica: La estrategia se implementó en la Unidad Educativa Moraspungo, en la parroquia de Moraspungo, cantón Pangua, provincia de Cotopaxi, con 31 estudiantes de 3ro "Ciencias B" de Bachillerato. Las actividades se estructuraron en sesiones prácticas integrando contenidos de cálculo y programación, permitiendo que los estudiantes interactuaran de manera directa y visual con los conceptos.

La sesión 1 consistió en una introducción a la programación en Python utilizando Visual Studio Code. Los estudiantes aprendieron a instalar librerías necesarias y crearon su primer proyecto. Se les enseñaron conceptos básicos de programación, como la importación de librerías y la escritura de funciones en Python para calcular la integral definida de una función. También

aprendieron a generar gráficos para visualizar la integral. El maestro explicó los conceptos clave, mostró cómo ejecutar Visual Studio Code y orientó a los estudiantes sobre el uso de las librerías sympy, numpy y matplotlib. Además, resolvió el ejercicio manualmente para verificar los resultados y guió la creación de la gráfica de la integral. Los estudiantes ejecutaron el programa en Python, instalaron las librerías, escribieron las funciones necesarias y verificaron los resultados manualmente. También realizaron la integración de la función definida $f(x) = 3x^2 + x - 5$ en el intervalo $[3,7]$ y visualizaron el área bajo la curva mediante gráficos.

Figura 4.

Resultado Programa Fase 1



Elaboración propia 2025

#Códigos de programación del ejercicio para copiar y pegar en el software Python

```
from sympy import integrate
```

```
from sympy.abc import x
```

```
f=3*x**2+x-5
```

```
i=integrate(f,(x,3,7))
```

```
print(i)
```

#Gráfica

```
from numpy import arange
```

```
x1=arange(-10,10,0.001)

f1=3*x1**2+x1-5

import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(x1,f1,label='f(x)=3x^2+x-5',color='tomato' )

plt.fill_between(x1,f1,where=(3<=x1)&(x1<=7),label='Integral definida')

plt.grid()

plt.title('Integral definida de f(x) en el intervalo [3,7]')

plt.xlabel('x')

plt.ylabel('f(x)')

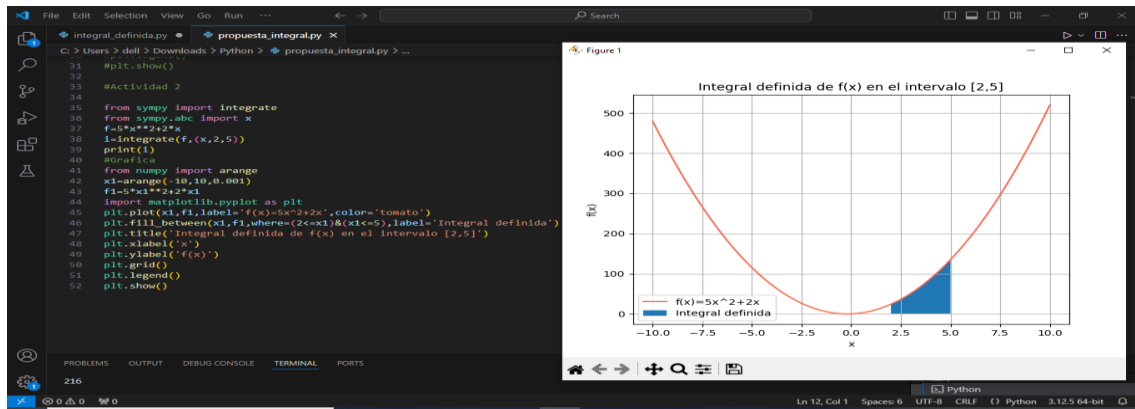
plt.legend()

plt.show()
```

La sesión 2 consistió en explicar y practicar el cálculo de integrales definidas utilizando Python. Los estudiantes programaron funciones sencillas para observar el proceso computacional y visualizaron un ejemplo de una integral definida. Para ello, se utilizaron bibliotecas como sympy para el cálculo simbólico, numpy para crear rangos de datos y matplotlib para graficar los resultados. Durante la actividad, los estudiantes crearon un proyecto en Python, importaron las bibliotecas necesarias, definieron la función a integrar y los límites de la integral. Luego, calcularon la integral utilizando el comando “integrate” y verificaron el resultado manualmente. Después, generaron una gráfica de la función en el intervalo de integración, destacando el área bajo la curva. El maestro guió a los estudiantes en cada paso, desde la ejecución de Python en Visual Studio Code hasta la verificación manual de resultados. Los estudiantes también realizaron ejercicios adicionales y trabajaron en grupos para fomentar la colaboración y la comprensión de los conceptos.

Figura 5.

Resultado Fase 2



Elaboración propia 2025

El código de programación empleado en esta fase fue el siguiente:

#Códigos de programación del ejercicio para copiar y pegar en el software Python

```
from sympy import integrate
```

```
from sympy.abc import x
```

```
f=5*x**2+2*x
```

```
i=integrate(f,(x,2,5))
```

```
print(i)
```

```
#Gráfica
```

```
from numpy import arange
```

```
x1=arange(-10,10,0.001)
```

```
f1=5*x1**2+2*x1
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.plot(x1,f1,label='f(x)=5x^2+2x',color='orange' )
```

```
plt.fill_between(x1,f1,where=(2<=x1)&(x1<=5),label='Integral definida')
```

```
plt.grid()
```

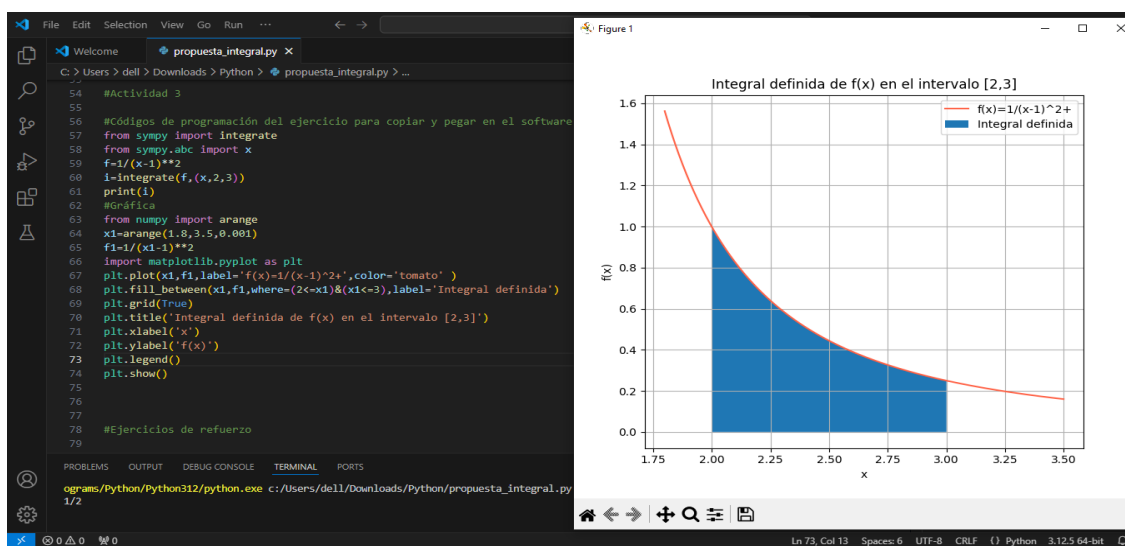
```
plt.title('Integral definida de f(x) en el intervalo [2,5]')
```

```
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('f(x)')  
plt.legend()  
plt.show()
```

En la Sesión 3, los estudiantes aprendieron a programar y visualizar la integral definida de una función utilizando Python y la librería matplotlib. Primero, se les explicó cómo calcular la integral de la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ en el intervalo [2,3] usando la librería sympy. Los estudiantes crearon un proyecto en Visual Studio Code, importaron las librerías necesarias, y escribieron el código para calcular la integral. Además, realizaron la verificación manual de los resultados. Posteriormente, los estudiantes generaron un gráfico de la función, utilizando numpy para definir el rango de valores del eje x y matplotlib para graficar la función y sombrear el área bajo la curva entre los límites de integración. También aprendieron a agregar un título a la gráfica y a visualizarla. El maestro guió todo el proceso, explicando los conceptos de programación y los pasos para realizar los cálculos y generar los gráficos. Los estudiantes trabajaron de forma práctica, ejecutando el código y verificando los resultados tanto numérica como visualmente.

Figura 6.

Resultado Fase 3



Elaboración propia 2025

El código de programación empleado en esta fase fue el siguiente:

#Códigos de programación del ejercicio para copiar y pegar en el software Python

```
from sympy import integrate
```

```
from sympy.abc import x
```

```
f=1/(x-1)**2
```

```
i=integrate(f,(x,2,3))
```

```
print(i)
```

```
#Gráfica
```

```
from numpy import arange
```

```
x1=arange(1.8,3.5,0.001)
```

```
f1=1/(x1-1)**2
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.plot(x1,f1,label='f(x)=1/(x-1)^2+',color='tomato' )
```

```
plt.fill_between(x1,f1,where=(2<=x1)&(x1<=3),label='Integral definida')
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.title('Integral definida de f(x) en el intervalo [2,3]')
```

```
plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel('f(x)')
```

```
plt.legend()
```

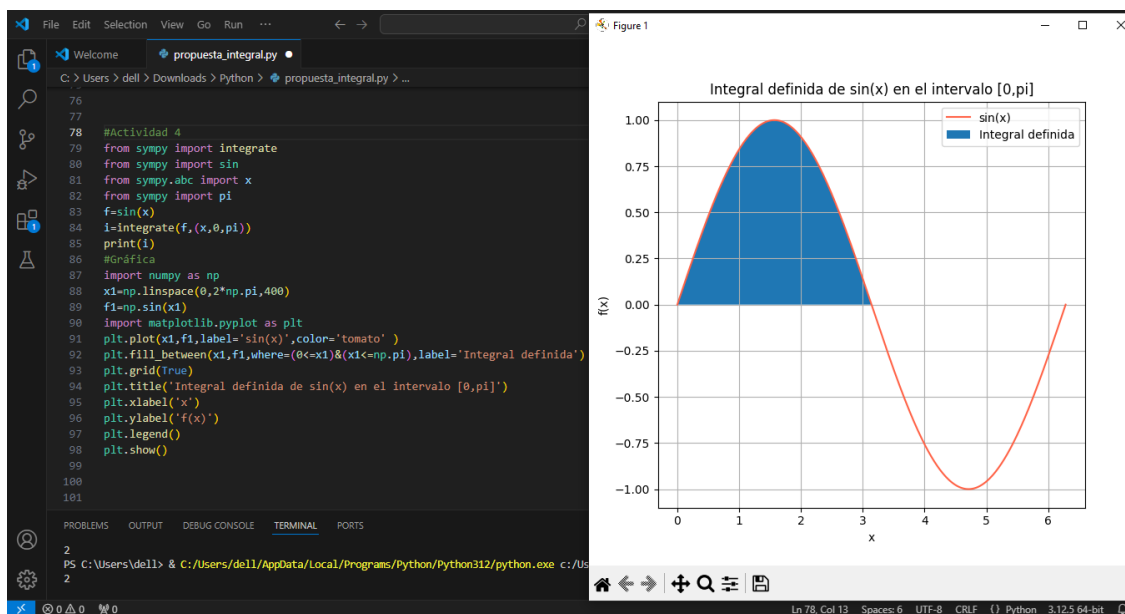
```
plt.show()
```

En la Sesión 4, los estudiantes aplicaron los conceptos aprendidos sobre integrales definidas, resolviendo problemas prácticos y verificando los resultados manualmente. Se les presentó el ejercicio de calcular la integral definida de la función $f(x)=\sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$, utilizando Python y la librería sympy. Los estudiantes crearon un proyecto en Visual Studio Code, importaron las librerías necesarias, escribieron el código para calcular la integral y la imprimieron

en pantalla. También realizaron la verificación manual de los cálculos, utilizando la regla de integración, obteniendo un resultado de 2.

Figura 7.

Resultado Fase 4



Elaboración propia 2025

El código de programación empleado en esta fase fue el siguiente:

#Códigos de programación del ejercicio para copiar y pegar en el software Python

```
from sympy import integrate
```

```
from sympy import sin
```

```
from sympy.abc import x
```

```
from sympy import pi
```

```
f=sin(x)
```

```
i=integrate(f,(x,0,pi))
```

```
print(i)
```

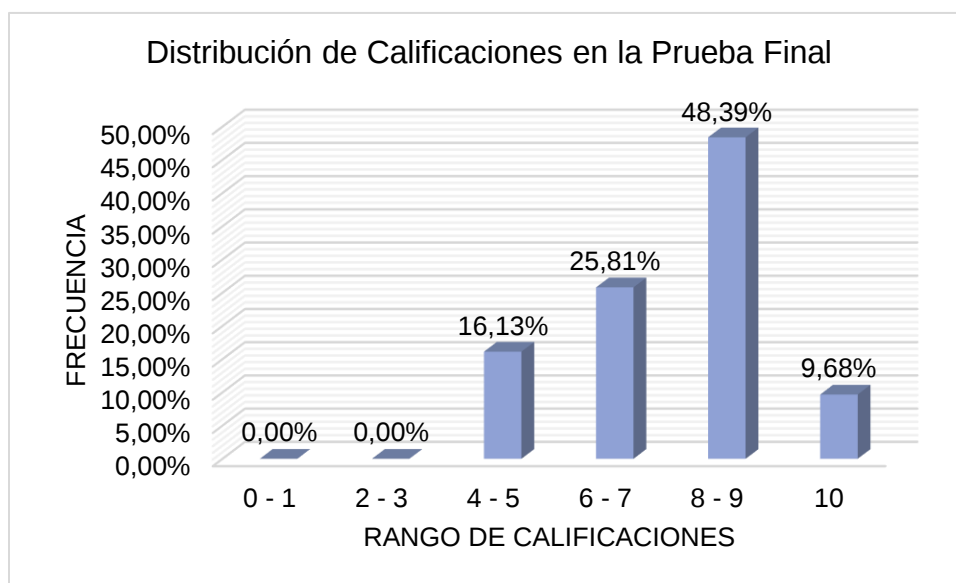
```
#Gráfica
```

```
import numpy as np
```

```
x1=np.linspace(0,2*np.pi,400)
f1=np.sin(x1)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x1,f1,label='sin(x)',color='tomato' )
plt.fill_between(x1,f1,where=(0<=x1)&(x1<=np.pi),label='Integral definida')
plt.grid(True)
plt.title('Integral definida de sin(x) en el intervalo [0,pi]')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.show()
```

Luego, generaron la gráfica de la misma función, utilizando numpy para definir el rango de valores del eje (x) y matplotlib para graficar la función. Los estudiantes sombrearon el área bajo la curva entre los límites de la integral y añadieron un título a la gráfica. El maestro guió el proceso, explicando cada paso, y los estudiantes practicaron la ejecución del código, la creación de proyectos, la importación de librerías y la visualización de los resultados tanto numérica como gráficamente.

La implementación de la estrategia didáctica basada en Python para enseñar integrales definidas en el tercer Año de Bachillerato ha demostrado ser eficaz para mejorar la comprensión teórica y práctica del tema. Los resultados de las pruebas finales evidencian un aumento notable en el dominio conceptual y en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas prácticos, como lo muestra la distribución de calificaciones. En comparación con la prueba diagnóstica inicial, donde la mayoría de los estudiantes obtuvo calificaciones bajas, la prueba final reveló que un porcentaje significativo alcanzó calificaciones más altas, especialmente en los rangos de 6 a 7 y 8 a 9 puntos, como se puede observar en la Figura 8.

Figura 8*Resultados de la Prueba*

Este cambio resalta el impacto positivo de la metodología que incorporó herramientas tecnológicas como Python y visualización gráfica, lo que permitió a los estudiantes superar dificultades previas en conceptos fundamentales como funciones, límites y derivadas. La visualización del área bajo la curva mediante gráficos interactivos facilitó una comprensión más profunda y práctica de las integrales definidas, ayudando a los estudiantes a realizar una transición de un aprendizaje abstracto a uno más tangible.

El análisis sugiere que el uso de herramientas tecnológicas, como Python, en la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos es una estrategia efectiva que fomenta la motivación y participación activa de los estudiantes. Además, esta metodología podría extenderse a otros temas matemáticos, ofreciendo un enfoque más dinámico y comprensible para los estudiantes, mejorando así la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Conclusiones

La implementación de una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales definidas en el tercer año de Bachillerato ha demostrado ser eficaz para mejorar la comprensión de los estudiantes en un tema de gran complejidad. A lo largo de la investigación, se identificaron y abordaron diversas dificultades en la enseñanza de las integrales, especialmente la falta de dominio de conceptos previos, la escasa visualización gráfica y el enfoque pedagógico tradicional. Al introducir herramientas tecnológicas, como Python y GeoGebra, los estudiantes lograron una mejor visualización y entendimiento de las integrales, lo que facilitó su aprendizaje. La estrategia didáctica permitió que los estudiantes no solo resolvieran problemas matemáticos de manera rutinaria, sino que también desarrollaran habilidades críticas y un mayor interés en el tema al experimentar con herramientas interactivas.

Además, la inclusión de Python como recurso educativo contribuyó al desarrollo de competencias en programación, un beneficio adicional que prepara a los estudiantes para los desafíos tecnológicos y científicos contemporáneos. La aplicación de este lenguaje permitió a los estudiantes realizar cálculos y observar los efectos de sus manipulaciones en tiempo real, lo que fomentó un aprendizaje activo y experimental. Sin embargo, los resultados también revelaron la necesidad de una capacitación docente para optimizar el uso de estas herramientas, así como un enfoque gradual en la introducción de estos recursos para evitar la frustración en los estudiantes.

Finalmente, la estrategia evidenció que el aprendizaje de las integrales definidas puede ser significativamente enriquecido al integrar enfoques constructivistas y métodos participativos. Estos enfoques favorecen la construcción de conocimientos más sólidos y aplicables, especialmente en temas que requieren habilidades de abstracción y razonamiento lógico, como es el caso de las integrales. La propuesta didáctica proporciona una base para futuros estudios que busquen profundizar en la relación entre tecnología y pedagogía en la enseñanza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

- Álava, W. L., Rodríguez, A. R., Macías, V. M., & Cornelio, O. M. (2023). La enseñanza–aprendizaje de la neurociencia en la educación superior. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, 2(5), 1-8.
- Arias, E., Giambruno, C., Morduchowicz, A., & Pineda, B. (2023). El estado de la Educación en América Latina y el Caribe 2023. Banco Interamericano de Desarrollo División de Educación.
- Bedón, P. Y. (2021). El liderazgo transformacional, en la formación de líderes estudiantiles en primero de bachillerato general unificado.
- Betancourt, K. J., & Cordero, Y. N. (2024). Incidencia de las estrategias didácticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el rendimiento académico de los estudiantes del Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa “Matilde Hidalgo de Procel”. *SATHIRI*, 2(19), 61-75.
- Buñay, L. M. (2024). Análisis descriptivo del Currículo de formación del docente de Matemáticas, frente al Currículo del Bachillerato General Unificado.
- Cevallos, E. R., & Mestre, U. (2023). Estrategia didáctica para el uso del software GeoGebra en el aprendizaje del movimiento y la fuerza en los estudiantes de Bachillerato General Unificado. *Educação Matemática Debate*, 13(7), 1-24.
- Educación, M. D. (2023). Marco Curricular Competencial de Aprendizajes. Quito, Ecuador. <https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2023/11/marco-curricular-competencial-de-aprendizajes.pdf>
- Hernández, P. A., & Samada, Y. (2021). La educación inclusiva desde el marco legal educativo en el Ecuador. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 3(6), 63-81.
- Hernández, J. A., Mora, F. M., Rodríguez, E. E., & Lizano, K. P. (2024). Parametrizando ejercicios con Python y LaTeX: una novedosa estrategia para generación de materiales de
-

- enseñanza y evaluación en matemáticas. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 2(24), 1-15.
- Llanes, J. E. (2020). Perspectivas del emprendimiento y espíritu emprendedor en los estudiantes de tercero Bachillerato General Unificado del Colegio Nacional “Mejía”.
- Ojeda, M. J., Herrera, D. G., Mediavilla, C. M., & Álvarez, J. C. (2020). El juego como motivación en el proceso de enseñanza aprendizaje del niño. Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonía, 1(5), 430-448.
- Posligua, Y. I., & Navarrete, Y. (2022). Estrategia metodológica para el fortalecimiento del trabajo colaborativo en los docentes de la Escuela de Educación Básica «República del Ecuador». Revista Cubana de Educación Superior, 3(41).
- Quintanchala, M. C. (2024). Mundos virtuales 3D para fortalecer el aprendizaje de historia en tercer año del bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Vicente Fierro.
- Rodríguez, J. M., Marcelo, A. P., Maldonado, R. C., & Hernández, H. P. (2022). EXPANSIÓN DE SEÑALES PERIÓDICAS EN SERIES DE FOURIER MEDIANTE PYTHON. In Congreso, 2(1), 284-294.
- UNESCO. (2019). Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE 2019). Nicaragua: Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago), Enrique Delpiano 2058, 7511019 Santiago, Chile.
- Villamar, A., & Sánchez, R. (2022). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Financiera desde el enfoque histórico-cultural. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Financiera desde el enfoque histórico-cult
-